Comportement en temps grand pour une équation de champ moyen

François Bolley (LPMA, Univ. Paris 6)

I. Gentil (Lyon), A. Guillin (Clermont-Ferrand)

Paris 6, mars 2015

I - L'équation des milieux granulaires

$$\partial_t f_t = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t \nabla U * f_t), \qquad t > 0, v \in \mathbb{R}^d \qquad (MG)$$

où

$$\nabla U * f_t\,(v) = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla U(v-w)\, f_t(w)\, dw$$

avec $U : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ pair et régulier.

Modèle cinétique homogène en espace

Conserve masse, positivité et vitesse moyenne : f_t densité de proba, $\int v\, f_t(v)\, dv = 0$.

Origine :

[Benedetto, Caglioti, Carrillo, Pulvirenti 97, 98]

Limite quasi élastique de l'équation de Boltzmann inélastique, 1d, noyau de sphères dures : $U(v) = (1-\alpha)|v|^3, \alpha \sim 1$.

* Sans diffusion : refroidissement : $f_t \longrightarrow \delta_0, \int |v|^2 f_t(v)\, dv \sim t^{-2}$.

* Avec diffusion : compétition diffusion/interaction

Entropie :

$$\mathcal{E}(f) = \int f \,\log f + \frac{1}{2} \iint U(v-w)\, f(v)\, f(w)\, dv dw$$

II - L'équation linéaire de Fokker-Planck

$$\partial_t f_t = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t \nabla U), \qquad t > 0, v \in \mathbb{R}^d \qquad (FP)$$

pour $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \int e^{-U} = 1$ donné.

Comportement en temps grand : compétition entre diffusion et dérive : $f_t \to e^{-U}$

Fonctionnelle de Liapounov : entropie relative

$$\mathcal{E}(f) = \int f \, \log f + \int U \, f = \int \frac{f}{e^{-U}} \log \frac{f}{e^{-U}} \, e^{-U} \geq 2 \, \|f - e^{-U}\|_{L^1}^2$$

[F. Otto] : (FP) est le flot gradient de $\mathcal{E}$ dans l'espace $\mathcal{P}$ des densités de proba muni de la distance de Monge-Kantorovich-Vaserstein

$$d(f,g)^2 = \inf_T \left\{ \int |T(v) - v|^2 \, f(v) \, dv; \; T\#f = g \right\}$$

cf. [Ambrosio-Gigli-Savaré], [Villani]

Flots gradient

Sur $\mathbb{R}^n$: pour $\dot{x}(t) = -\nabla E(x(t))$ avec $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2, 0 unique min, $E(0) = 0$.
Quantifier $x(t) \to 0$?

$$
\begin{array}{rllcc}
|x(t) - 0| & \leq e^{-\rho t}\,|x(0) - 0| & \forall x(0) & \textbf{ssi} & \rho|x|^2 \leq x \cdot \nabla E(x) \quad \forall x \\
|x(t) - y(t)| & \leq e^{-\rho t}\,|x(0) - y(0)| & \forall x(0), y(0) & \textbf{ssi} & \mathrm{Hess}\, E \geq \rho \\
E(x(t)) & \leq e^{-2\rho t}\,E(x(0)) & \forall x(0) & \textbf{ssi} & 2\,\rho\, E \leq |\nabla E|^2
\end{array}
$$

Par analogie : (FP) flot gradient de l'entropie $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$, e^{-U} unique min, $\mathcal{E}(e^{-U}) = 0$.
Quantifier $f_t \to e^{-U}$?

$$
\begin{array}{rllcc}
d(f_t, e^{-U}) & \leq e^{-\rho t}\,d(f_0, e^{-U}) & \forall f_0 & \textbf{ssi} & \rho\, d(f, e^{-U})^2 \leq \text{dissipation} \quad \forall f \\
d(f_t, g_t) & \leq e^{-\rho t}\,d(f_0, g_0) & \forall f_0, g_0 & \textbf{ssi} & \mathrm{Hess}\, U \geq \rho \quad \text{(Sturm-von Renesse)} \\
\mathcal{E}(f_t) & \leq e^{-2\rho t}\,\mathcal{E}(f_0) & \forall f_0 & \textbf{ssi} & 2\,\rho\,\mathcal{E}(f) \leq I(f) \quad \forall f \quad \text{(log Sobolev)}
\end{array}
$$

Flots gradient

Sur $\mathbb{R}^n$: pour $\dot{x}(t) = -\nabla E(x(t))$ avec $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2, 0 unique min, $E(0) = 0$.
Quantifier $x(t) \to 0$?

$\lvert x(t) - 0\rvert$	$\leq e^{-\rho t}\, \lvert x(0) - 0\rvert$	$\forall x(0)$	**ssi**	$\rho \lvert x\rvert^2 \leq x \cdot \nabla E(x) \quad \forall x$
$\lvert x(t) - y(t)\rvert$	$\leq e^{-\rho t}\, \lvert x(0) - y(0)\rvert$	$\forall x(0), y(0)$	**ssi**	$\mathrm{Hess}\, E \geq \rho$
$E(x(t))$	$\leq e^{-2\rho t}\, E(x(0))$	$\forall x(0)$	**ssi**	$2\,\rho\, E \leq \lvert\nabla E\rvert^2$

Par analogie :(FP) flot gradient de l'entropie $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{P}$, e^{-U} unique min, $\mathcal{E}(e^{-U}) = 0$.
Quantifier $f_t \to e^{-U}$?

$d(f_t, e^{-U})$	$\leq e^{-\rho t}\, d(f_0, e^{-U})$	$\forall f_0$	**ssi**	$\rho\, d(f, e^{-U})^2 \leq \text{dissipation} \quad \forall f$
$d(f_t, g_t)$	$\leq e^{-\rho t}\, d(f_0, g_0)$	$\forall f_0, g_0$	**ssi**	$\mathcal{E}$ est ρ-convexe (McCann)
$\mathcal{E}(f_t)$	$\leq e^{-2\rho t}\, \mathcal{E}(f_0)$	$\forall f_0$	**ssi**	$2\,\rho\, \mathcal{E}(f) \leq I(f) \quad \forall f$ (log Sobolev)

Ainsi : pour l'équation linéaire de Fokker-Planck

$$\partial_t f_t = \Delta f_t + \nabla \cdot (f_t \nabla U), \qquad t > 0, v \in \mathbb{R}^d \qquad (FP)$$

comprendre

$$d(f_t, e^{-U}) \ \leq e^{-\rho t}\, d(f_0, e^{-U}) \qquad \forall f_0 \qquad \textbf{ssi} \qquad \rho\, d(f, e^{-U})^2 \leq \text{dissipation} \quad \forall f$$

$$d(f_t, g_t) \ \leq e^{-\rho t}\, d(f_0, g_0) \qquad \forall f_0, g_0 \quad \textbf{ssi} \quad \operatorname{Hess} U \geq \rho \quad \text{(Sturm-von Renesse)}$$

Calcul de la **dissipation** de la distance de Vaserstein : pour deux densités de proba f et g,

$$d(f,g)^2 = \inf \left\{ \int |T(v) - v|^2\, f(v)\, dv; T\#f = g \right\}$$

[Brenier, Rüschendorf] : Il existe une fonction convexe ϕ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $g = \nabla\phi\#f$ et $T = \nabla\phi$ est optimal,

$$d(f,g)^2 = \int |\nabla\phi(v) - v|^2 f(v)\, dv.$$

En particulier pour deux solutions f_t et g_t

$$d(f_t, g_t)^2 = \int |\nabla\phi_t(v) - v|^2 f_t(v)\, dv$$

où ϕ_t est convexe et $g_t = \nabla\phi_t\#f_t$. On dérive en t :

si

$$d(f_t, g_t)^2 = \int |\nabla \phi_t(v) - v|^2 f_t(v) dv$$

où ϕ_t est convexe et vérifie $\nabla \phi_t \# f_t = g_t$, alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} d(f_t, g_t)^2 =$$
$$- \int \left[\Delta \phi_t^*(\nabla \phi_t(v)) + \Delta \phi_t(v) - 2d + (\nabla U(\nabla \phi_t(v)) - \nabla U(v)) \cdot (\nabla \phi_t(v) - v) \right] f_t(v) \, dv.$$

Ici ϕ^* est la transformée de Legendre de ϕ, et $\nabla \phi_t^* \# g_t = f_t$.

Corollaire ([Sturm-von Renesse])

$$d(f_t, g_t)^2 \leq e^{-2\rho t} d(f_0, g_0)^2 \quad \forall\, t, f_0, g_0 \qquad \textbf{ssi} \qquad \mathrm{Hess}\, U \geq \rho$$

Idée de la démonstration

1. Condition suffisante : $\Delta \phi_t^*(\nabla \phi_t(v)) + \Delta \phi_t(v) - 2d \geq 0$ pour tout v (en $1d$, c'est $1/\phi''(v) + \phi''(v) - 2 = (\phi''(v) - 1)^2/\phi''(v)$) et intégration en t.

2. Condition nécessaire : on dérive en $t = 0$ et on prend $f_0 = \delta_v$ et $g_0 = \delta_w$.

Influence du terme de diffusion : on prend $U(v) = v^4/4$ sur $\mathbb{R}$.

1. Sans diffusion : les caractéristiques associées à

$$\partial_t f_t = \nabla \cdot (f_t \nabla U)$$

sont $v' = -v^3$, soit

$$v(t)^2 = \frac{v(0)^2}{1 + 2tv(0)^2}.$$

Ainsi $f_t \longrightarrow \delta_0$ avec

$$d(f_t, \delta_0)^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{v^2}{1 + 2tv^2} \, f_0(v) \, dv \sim \frac{1}{t}, \qquad t \to +\infty.$$

2. Avec diffusion : il existe $\rho > 0$ tel que

$$d(f_t, e^{-U}) \leq e^{-\rho t} \, d(f_0, e^{-U}), \qquad \forall \, t, f_0.$$

III - Retour à l'équation des milieux granulaires

$$\partial_t f_t \,=\, \Delta f_t + \nabla \cdot \left(f_t \left(\nabla U * f_t\right)\right), \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^d.$$

Motivation : $U(v) = |v|^3$ sur $\mathbb{R}$.
Pour des U strict. convexes et confinant il existe un unique minimiseur f_∞ de l'entropie $\mathcal{E}$ (McCann, Benedetto-Caglioti-Carrillo-Pulvirenti), et par compacité les solutions convergent vers f_∞. De plus

$$f_\infty = e^{-U * f_\infty - Z}.$$

Taux de convergence ?

Si Hess $U \geq \rho > 0$ alors comme dans le cas linéaire

$$d(f_t, g_t) \leq e^{-\rho t} d(f_0, g_0)\,, \qquad \mathcal{E}(f_t) - \mathcal{E}(f_\infty) \leq e^{-2\rho t}\big(\mathcal{E}(f_0) - \mathcal{E}(f_\infty)\big).$$

Si la convexité dégénère, seul un taux polynomial, ou exponentiel mais dépendant de la donnée initiale :

$$\mathcal{E}(f_t) - \mathcal{E}(f_\infty) \leq t^{-\alpha}, \quad d(f_t, f_\infty) \leq t^{-\beta}, \quad \mathcal{E}(f_t) - \mathcal{E}(f_\infty) \leq e^{-C(\mathcal{E}(f_0))\, t}$$

[Carrillo-McCann-Villani 2003, 2006]

Taux exponentiel universel ?

Théorème [B., Gentil, Guillin]. *Pour U convexe sur $\mathbb{R}^d$, et uniformément à l'infini, il existe un unique équilibre f_∞ et $\rho > 0$ tel que*

$$d(f_t, f_\infty) \leq e^{-\rho t}\, d(f_0, f_\infty), \qquad t \geq 0, f_0.$$

Démonstration.
1. Existence d'un équilibre f_∞ by compacité (unicité : conséquence de la borne exp).
2. On compare $d(f_t, f_\infty)^2$ à sa dissipation : on montre

$$\rho \int |\nabla\phi(v) - v|^2 f_\infty \leq \int [\Delta\phi^*(\nabla\phi) + \Delta\phi - 2d]\, f_\infty$$

$$+\frac{1}{2}\int (\nabla U(\nabla\phi(v) - \nabla\phi(w)) - \nabla U(v-w)) \cdot (\nabla\phi(v) - \nabla\phi(w) - (v-w))\, f_\infty(v) f_\infty(w)$$

pour toute application de transport $\nabla\phi$ t. q. $\int \nabla\phi f_\infty = \int x f_\infty$, on applique à $f_t = \nabla\phi_t \# f_\infty$.

a. On remarque

$$2\int |\nabla\phi(v) - v|^2 f_\infty = \iint |\nabla\phi(v) - \nabla\phi(w) - (v-w)|^2 f_\infty(v) f_\infty(w)$$

b. Hors de $X = \{(v,w) \in \mathbb{R}^{2d}; |v-w| \leq R, |\nabla\phi(v) - \nabla\phi(w)| \leq\ R\ \}$ on utilise la convexité uniforme, et dans X la **diffusion** (inégalité de Poincaré sur une boule).

Remarques

1. Améliore la méthode de dissipation de l'entropie dans le cas non linéaire, pas dans le cas linéaire.

2. On peut ajouter un potentiel extérieur, et par perturbation considérer des doubles puits peu marqués.

3. Le calcul du taux de convergence exponentiel n'utilise pas l'entropie / la forme gradient de la dérive / la structure de flot gradient de l'équation : $\nabla U(v) = A(v)$ avec A monotone.

IV - Extensions

1. Potentiels en double puits, singuliers

2. Diffusions non linéaires : travail avec J. A. Carrillo

$$\partial_t f_t \,=\, \Delta F(f_t) + \nabla \cdot (f_t \,(\nabla U * f_t)), \qquad t > 0,\ v \in \mathbb{R}^d.$$

3. Diffusions dégénérées : équation de Vlasov-Fokker-Planck

$$\partial_t f_t \,+ v \cdot \nabla_x f_t = \,\Delta_v f_t + \nabla_v \cdot (f_t \,(v + \nabla \Psi(x) + \nabla U *_{x,v} f_t)), \qquad t > 0,\ x, v \in \mathbb{R}^d$$

pour des potentiels extérieur $\Psi(x)$ et d'interaction $U(x, v)$

Dynamique associée : équations de Newton avec bruit

$$dX_t = V_t \, dt, \qquad dV_t = \sqrt{2} dB_t - V_t \, dt - \nabla \Psi(X_t) \, dt - \nabla U *_{x,v} f_t \,(X_t, V_t) \, dt$$

où $f_t(x, t) \, dxdv$ est la loi de (X_t, V_t)

Entropie :

$$\mathcal{E}(f) = \int f \, \log f + \int \Big(\frac{|v|^2}{2} + \Psi(x) \Big) f + \frac{1}{2} \iint U(x - y) \, f(x, v) \, f(y, w) \, dxdv \, dydw$$