Bulles de concentration critiques

Pierre Raphaël

Université de Nice Sophia Antipolis
et Institut Universitaire de France

Séminaire Paris 6 (2013)

NLS

- Propagation d'ondes dans des milieux nonlinéaires: optique nonlinéaire, plasma, ferromagnétisme, fluide...
- Un modèle canonique: équation de Schrödinger nonlinéaire,

$$(NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + u|u|^{p-1} = 0 \\ u_{|t=0}(x) = u_0(x) \ \text{ smooth} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^N, \quad u(t,x) \in \mathbb{C}.$$

- Compétition entre dispersion et concentration.
- Modèles reliés: ondes, chaleur, KdV,...

Strructure du problème

$$\begin{cases} \text{Energy}: \quad E(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} = E(u_0) \\ \text{Mass}: \quad \int |u|^2 = \int |u_0|^2 \end{cases}$$

- Invariance d'échelle:

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x),$$

$$\|\nabla^{s_c} u_\lambda(t,\cdot)\|_{L^2} = \|\nabla^{s_c} u(\lambda^2 t,\cdot)\|_{L^2} \quad \text{pour} \quad s_c = \frac{N}{2} - \frac{2}{p-1}.$$

- Problèmes critiques:

$$\left| \begin{array}{l} p = 1 + \frac{4}{N} \Longrightarrow s_c = 0 \;\; \text{masse critique}, \\ p = 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2} \Longrightarrow s_c = 1 \;\; \text{energie critique}. \end{array} \right.$$

Problème masse critique et onde solitaire

- Donnée petite dans L^2 implique existence globale et scattering.
  – Estimées de Strichartz [Strichartz 79]
  – [Cazenave, Weissler 89].

- Etat fondamental et onde solitaire:

$$\Delta Q - Q + Q^p = 0, \quad Q > 0, \quad Q \ \text{ radial.}$$

  – Meilleurs constante pour Sobolev
  – Méthodes variationnelles+ EDP elliptiques nonlinéaires.

- Critère optimal:

$$\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2} \Longrightarrow (T = +\infty) \quad + \quad \text{scattering}$$

  – [Ginibre, Velo 80], [Weinstein, 83], [Killip, Visan 08], [Dodson, 11,12].

Problème énergie critique

- (NLS): $i\partial_t u + \Delta u + u|u|^{p-1} = 0, \quad p = 2^* - 1, \quad s_c = 1.$

$\Longrightarrow$ [Kenig, Merle 06]: scattering sous l'onde solitaire

- Landau Lifschitz/wave maps critiques:

$$\left.\begin{array}{l} u \wedge \partial_t u \\ \partial_t u \end{array}\right\} = \Delta u + |\nabla u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{S}^2.$$

  - Energie de Dirichlet: $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx$.
  - Invariance d'échelle: $u_\lambda(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$,

$$E(u_\lambda) = E(u).$$

Existence globale pour wave/NLS map/ flot harmonique

Acitivité internationale très importante sur ces problèmes depuis 20 ans:

- Existence globale (régularité critique):
  – flot harmonique: [Struwe, 85]
  – wave maps: [Christodoulou, Tahvildar Zadeh 90's], [Struwe 03], [Tao 00], [Tataru, 00], [Tao, 07-10], [Krieger, Schlag 10], [Tataru, Sterbenz 10].
  – "Kenig-Merle route map"
- Phénomène général:
  – L'onde solitaire est "le premier objet nonlinéaire".
  – Scattering sous le soliton.

Construction de bulles explosives

Bulles de concentration:

$$u(t,x) \sim Q\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), \quad \lim_{t\to T} \lambda(t) = 0.$$

- wave map: [Krieger, Schlag, Tataru 07], [Rodnianski, Sterbenz 07], [R., Rodnianski, 10]: blow up instables/stables.
- Schrödinger map: instabilité de l'explosion par rotation, [Merle, R., Rodnianski, 12].
- Heat flow: [Berg, Hulshof, King 02], [R., Schweyer 13], quantification des vitesses:

$$\lambda(t) \sim \frac{(T-t)^j}{|\log(T-t)|^{\frac{2j}{2j-1}}}, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

Méthodologie

- Construction d'une solution approchée:
  – simplification des heuristiques formelles par "matched asymptotics"
  – extraction du système dynamique de dimension finie qui gouverne $\lambda(t)$.
- Controle du flot près de la solution approchée:
  – estimations mixtes "Energie/Morawetz" dans le cadre explosif.
  – pas besoin d'estimées spectrales sur le linéarisé.

$\Longrightarrow$ Robustesse de la méthode.

$\Longrightarrow$ [R, Schweyer, 13], stabilité du blow up pour Keller Segel critique.

Classification pour (gKdV)

$$(gKdV)\quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^5) = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Même structure que NLS masse critique en dimension 1:

- Lois de conservation énergie+norme L^2.
- Invariance $u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{1}{2}} u(\lambda^3 t, \lambda x)$.
- Onde solitaire de type onde progressive $u(t,x) = Q(x-t)$.
- Existence globale:
  – scattering à petite donnée [Kenig, Ponce, Vega 00].
  – $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ implique $T = +\infty$.

Le flot près de l'onde solitaire

- Donnée initiale: $u_0 = Q + \varepsilon_0, \quad \|\varepsilon_0\| \ll 1.$

- Sur un temps petit:

$$u(t,x) = \frac{1}{\lambda(t)^{\frac{1}{2}}}(Q+\varepsilon)\left(t, \frac{x - x(t)}{\lambda(t)}\right), \quad \|\varepsilon(t))\|_{L^2} \ll 1.$$

$\Longrightarrow$ Couplage entre $\varepsilon(t,x)$ et $(\lambda(t), x(t))$.

- Exemple: blow up signifie $\lambda(t) \to 0$ quand $t \to T < +\infty$.

- [Martel, Merle, 98-02]: existence de dynamiques explosives+description partielle de la bulle de concentration.

Rigidité du flot

[Martel, Merle, R., I 12]: supposons

$$\|\varepsilon_0\|_{H^1} \ll 1, \quad \int_{x>0} x^{10}\varepsilon_0^2(x)dx < 1.$$

Alors 3 scenario possibles:

- (Blow up): $\lambda(t) \sim T - t$, stable.
- (Soliton): $T = +\infty$, $\lambda(t) \to \lambda_\infty > 0$, sur le bord.
- (Exit): $\|\varepsilon(t^*)\|_{L^2} = \alpha$ universel, stable.

$\Longrightarrow$ Résultats partiels dans le cas surcritique: [Nakanishi, Schlag 2010].

Existence et unicité de l'élément minimal

[Martel, Merle, R., II 12] Il existe une unique solution minimale explosive $\|S(t)\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$. Elle explose en $t = 0$ et est globale et bornée quand $t \to +\infty$.

- Formule explicite pour NLS: symétrie conforme.
- [Martel, Merle 05]: non existence de solution explosive minimale sous hypothèse de décroissance à droite.
- L'existence de l'élément minimal semble générique: [R., Szeftel, 11], [T. Boulenger, 2012], [Krieger, Lenzman, R. 2012].
- Objets minimaux fondamentaux: [Duyckaerts, Merle 08] pour énergie critique, thèorèmes de Liouville.
- Unicité délicate: [Merle 92], [R., Szeftel, 11].

Description de la sortie

Phénomène universel: la solution minimale est l'attracteur universel des solutions en sortie:

[Martel, Merle, R., II 12] Soit $u(t,x)$ en (Sortie) et t_u^* le temps de sortie. Alors:

$$\left\|(\lambda_u^*)^{\frac{1}{2}} u\left(t_u^*, \lambda_u^* x + x_u^*\right) - S(\tau^*, x)\right\|_{L^2} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|u_0\|_{L^2} \to \|Q\|_{L^2}.$$

– Description partielle similaire pour NLS: [Merle, R., Szeftel 10]
– Calcul explicite de la solution.

Corollaire Si $S(t)$ fait scattering quand $t \to +\infty$, alors *(Exit)* implique $T = +\infty$ et scattering.

Blow up lent

[Martel, Merle, R., no III 2012]: construction de données $u_0 \in H^1$ près de Q avec

$$\int_{x>0} x^{10}\varepsilon_0^2(x)dx = +\infty,$$

par exemple:

$$T < +\infty \;\text{ and }\; \|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{(T-t)^\nu}, \quad \forall \nu > \frac{11}{13},$$

$$T = +\infty \;\text{ and }\; \|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \begin{cases} t^\nu, & \forall \nu > 0 \\ e^t. & \end{cases}.$$

$\Longrightarrow$ Résultats analogues sur les wave map/heat flow [Krieger, Schlag, Tataru 2007], [Gustaffson, Kang, Nakanishi, Tsai 2008].