Estimations spectrales pour des opérateurs de Schrödinger sur des variétés

Maria J. ESTEBAN

C.N.R.S. et Université Paris-Dauphine

En collaboration avec : Jean Dolbeault, Ari Laptev et Michael Loss

http://www.ceremade.dauphine.fr/∼esteban/

Motivation I

Dans notre* étude sur la symétrie ou rupture de symétrie des fonctions extrémales d'inégalités fonctionnelles avec symétrie, et plus particulièrement, dans l'étude des inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^p}{|x|^{b\,p}}\,dx\right)^{2/p} \le \mathsf{C}_{a,b} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^{2\,a}}\,dx$$

avec $a \le b \le a+1$ if $d \ge 3$, $a < b \le a+1$ si $d = 2$, et $a \neq \frac{d-2}{2}$,

$$p = \frac{2\,d}{d-2+2\,(b-a)}$$

nous avons été amenés à nous intéresser à la meilleure constante des inégalités de Keller (ou Lieb-Thirring pour 1 état) dans le cylindre $\mathbb{R} \times S^{d-1}$:

• Comment la première valeur propre de $-\Delta_g - V$ sur le cylindre dépend de V si V est un potentiel positif ?
• Et surtout, quels sont les potentiels pour lesquels la dépendance est optimale ?
• Dépendent-ils des variables angulaires, ou seulement de la variable de la longueur sur le cylindre ?

notre* = J. Dolbeault, MJE, M. Loss, G. Tarantello, A. Tertikas.

Motivation II

$$t = \log|x| \;, \quad \theta = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1} \;, \quad w(t,\theta) = |x|^{-a}\, v(x) \;, \quad \Lambda = \frac{1}{4}\,(d-2-2a)^2$$

• Les inégalités de Caffarelli-Kohn-Nirenberg re-écrites dans le cylindre deviennent des inégalités d'interpolation du type Gagliardo-Nirenberg

$$\|w\|^2_{L^p(\mathcal{C})} \leq C_{\Lambda,p} \left[\|\nabla w\|^2_{L^2(\mathcal{C})} + \Lambda\, \|w\|^2_{L^2(\mathcal{C})} \right]$$

où $\mathcal{C} = \mathbb{R} \times S^{d-1}$.

THM [Dolbeault, E. Loss].- Les fonctions extrémales pour cette inégalité dépendraient seulement de la variable $s \in \mathbb{R}$ ssi le potentiel optimal pour des inégalités de type Lieb-Thirring dans le cylindre avaient la même propriété...

Un problème résoud l'autre, et la connaissance de la meilleure constante pour l'une donne la meilleure constante pour l'autre...

Espace Euclidien : Inégalités de Keller et Lieb-Thirring

$$H = -\Delta - V \;\text{ in }\; H^1(\mathbb{R}^d)$$

Si V n'est pas négatif, et si H a des valeurs propres négatives, appelons-les : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

$$(\mathrm{LT}^-, 1976) \qquad \sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^\gamma \leq L_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} V_+^{\gamma + \frac{d}{2}} ,$$

pour $\gamma \geq 1/2$ si $d = 1$, $\gamma > 0$ si $d = 2$ et $\gamma \geq 0$ si $d \geq 3$.

Beaucoup de noms associés à ces inégalités : Keller, Lieb-Thirring, Weidl, Cwikel, Rosenbljum, Aizenman, Laptev-Weidl, Helffer, Robert, ... Dolbeault-Laptev-Loss, ...

$$(\mathrm{Keller}, 1961) \qquad |\lambda_1|^\gamma \leq L^1_{\gamma,d} \int_{\mathbb{R}^d} V_+^{\gamma + \frac{d}{2}} \; ; \quad V_+ = \max\{V, 0\}$$

Il y a un certain nombre de conjectures sur les valeurs optimales pour les meilleurs constantes dans ces inégalités. Par exemple, il a été conjecturé par Lieb et Thirring que pour γ suffisamment grand,

$$L_{\gamma,d} \approx L^{\mathrm{cl}}_{\gamma,d} = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2^d\, \pi^{d/2}\, \Gamma\left(\sigma + \frac{d}{2} + 1\right)} ,$$

et cette constante “classique" peut être calculée comme une moyenne dans l'espace des phases.

Inégalités sur des variétés

Très peu de résultats connus :

• P. Federbusch et O.S. Rothaus : lien entre les inégalités de Sobolev logarithmiques et l'état fondamental d'opérateurs de Schrödinger.

• Levin et Solomyak : preuve de l'inégalité de Rozenbljum-Lieb-Cwikel (cas $\gamma = 0$) sur des variétés.

• Lieb, Levin, Ouabaz-Poupaud, ...

• 2 articles d'Ilyin, où il étudie ces inégalités sur la sphère unité, dans l'espace des fonctions orthogonales aux constantes.

L'exclusion des constantes mène à des résultats du type “classique", du même type que celles obtenues dans le cas Euclidien.

Résultats sur la sphère I

Sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{d+1}$, S^d, on utilise la mesure $d\omega$ induite par la mesure Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d+1}$ et afin de la normaliser, on la divise par $|S^d|$.

Déf.- $2^* = 2d/(d-2)$ si $d \geq 3$, $2^* = +\infty$ si non. De plus, pour tout $q \in (2, 2^*)$, $\kappa_{q,d} := |S^d|^{1-\frac{2}{q}}$

THM [Dolbeault-E-Laptev].- Soit $d \geq 1$, $p \in \big(\max\{1, d/2\}, +\infty\big)$. Il existe une fonction croissante $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\alpha(\mu) = \mu$ pour $\mu \in \big[0, \frac{d}{2}(p-1)\big]$, qui est convexe pour $\mu \in \big(\frac{d}{2}(p-1), +\infty\big)$, et telle que

$$(1) \qquad |\lambda_1(-\Delta - V)| \leq \alpha\big(\|V\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{S}^d)}\big) ,$$

pour tout potentiel positif $V \in \mathrm{L}^p(\mathbb{S}^d)$. De plus, pour des valeurs grandes de μ,

$$(2) \qquad \alpha(\mu)^{p-\frac{d}{2}} = \mathrm{L}^1_{p-\frac{d}{2},d}\,(\kappa_{q,d}\,\mu)^p\,(1 + o(1)) , \quad p = \frac{q}{q-2} .$$

L'estimation (1) est optimale dans le sens que pour toute valeur de $\mu = \|V\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{S}^d)}$, il existe un potentiel V positif tel que $|\lambda_1(-\Delta - V)| = \alpha(\mu)$, et ceci pour tout $\mu \in \big(\frac{d}{2}(p-1), +\infty\big)$.

Si $\mu \leq \frac{d}{2}(p-1)$, l'égalité a lieu pour les fonctions constantes.

Résultats sur la sphère II

Corollaire [Dolbeault-E-Laptev].- Soit $d \geq 1$ et soit V un potentiel positif. Pour $\mu = \|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)}$ grand nous avons :

$$(1) \qquad |\lambda_1(-\Delta - V)|^\gamma \leq L^1_{\gamma,d}\,(1 + o_\mu(1)) \int_{\mathbb{S}^d} V^{\gamma+\frac{d}{2}}\; d\omega$$

si $\gamma > \max\{0, 1 - d/2\}$ ou si $\gamma = 1/2$ et $d = 1$.

Néanmoins, si $\mu = \|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)} \leq \frac{1}{4}\, d\,(2\,\gamma + d - 2)$, alors,

$$(2) \qquad |\lambda_1(-\Delta - V)|^{\gamma+\frac{d}{2}} \leq \int_{\mathbb{S}^d} V^{\gamma+\frac{d}{2}}\; d\omega$$

pour tout $\gamma \geq \max\{0, 1 - d/2\}$, et cette estimation est optimale.

Remarque.- L'estimation (2) montre qu'on ne peut pas espérer une estimation du type Lieb-Thirring dans l'espace Euclidien, car pour des normes petites,

$$|\lambda_1(-\Delta - V)| \leq \|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)} \not\leq C\;\|V\|^{1+\frac{d}{2\gamma}}_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)}$$

Inégalités d'interpolation pour potentiels attractifs

Résultat standard du calcul des variations implique que pour $q \in (2, 2^*]$, $\alpha > 0$,

$$\mu(\alpha) := \inf_{u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^d, d\sigma) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^d)} + \alpha \, \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^d)}}{\|u\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{S}^d)}}$$

est atteint.

Propriétés de μ pour $2 < q < 2^*$:

• $\mu(\alpha) \leq \alpha$ (fonctions test $=$ functions constantes)

• la fonction $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$ est croissante et concave.

• pour $\alpha > \frac{d}{q-2}$, $\mu(\alpha) < \alpha$ (fonctions test $= 1 + \varepsilon \varphi_1$)

et résultat bien plus difficile :

• $\mu(\alpha) = \alpha$ pour tout $0 < \alpha \leq \frac{d}{q-2}$.

Résultats de rigidité sur la sphère

L'équation d'Euler-Lagrange correspondant au problème de minimisation définissant $\mu(\alpha)$ est (à multiplication par une constante près) :

$$(1) \qquad -\Delta_g u + \alpha\, u = u^{q-1} \text{ sur } S^d$$

THM [Bidaut-Véron et Véron].-

Pour $\alpha \leq \frac{\lambda_1}{q-2}$ et $2 < q < 2^*$, l'unique solution positive de (1) est la solution constante $u \equiv \alpha^{\frac{1}{q-2}}$.

Remarque.- La première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^d est égale à d.

Corollaire.- Les fonctions qui minimisent $\mu(\alpha)$ sont des solutions de (1), et au moins une, $\bar{u}$, est positive, donc, pour $\alpha \leq \frac{d}{q-2}$, $\bar{u}$ est constante et donc

$$\mu(\alpha) = \frac{\|\nabla \bar{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^d)} + \alpha\, \|\bar{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^d)}}{\|\bar{u}\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{S}^d)}} = \alpha$$

Relation entre inégalités d'interpolation et estimations spectrales

La fonction $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$ est inversible, avec inverse $\mu \mapsto \alpha(\mu)$, si $d=1$, $d=2$ ou si $d \geq 3$ et $2<q<2^*$, et de plus,

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\nabla u|^2 \, d\sigma - \mu \left(\int_{\mathbb{S}^d} |u|^q \, d\sigma \right)^{\frac{2}{q}} \geq -\,\alpha(\mu) \int_{\mathbb{S}^d} |u|^2 \, d\sigma \quad \forall\, u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^d, d\sigma)\,, \quad \forall\, \mu > 0\,.$$

Pour un potentiel V et une fonction quelconque $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^d, d\sigma)$,

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\nabla u|^2 \, d\sigma - \int_{\mathbb{S}^d} V\, |u|^2 \, d\sigma \geq \int_{\mathbb{S}^d} |\nabla u|^2 \, d\sigma - \|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)} \left(\int_{\mathbb{S}^d} |u|^q \, d\sigma \right)^{\frac{2}{q}}$$

Si l'on définit $\mu = \|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)}$, alors,

$$\int_{\mathbb{S}^d} |\nabla u|^2 \, d\sigma - \int_{\mathbb{S}^d} V\, |u|^2 \, d\sigma \geq -\,\alpha(\|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)}) \int_{\mathbb{S}^d} |u|^2 \, d\sigma \quad \forall\, u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^d, d\sigma)\,, \quad \forall\, \mu > 0\,.$$

et donc

$$\lambda_1(-\Delta - V) \geq -\,\alpha\left(\|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)} \right)$$

Propriétés de la fonction $\alpha(\mu)$

La fonction $\alpha(\mu)$ satisfait les propriétés suivantes :

- $\alpha(\mu) \geq \mu$, pour tout $\mu > 0$.
- la fonction $\mu \mapsto \alpha(\mu)$ est croissante et convexe.
- pour $\mu > \frac{d}{q-2}$, $\alpha(\mu) > \mu$
- $\alpha(\mu) = \mu$ pour tout $0 < \mu \leq \frac{d}{q-2}$.

Mais encore plus :

- Pour μ grand,

$$\alpha(\mu) = L^1_{\gamma,d}\,(1 + o(1))\,\left(\kappa_{q,d}\,\mu\right)^{1+\frac{d}{2\gamma}} \;,$$

donc, comportement semiclassique, équivalent à celui dans l'espace Euclidien.

RAPPEL.- Si $V \geq 0$, et si $\|V\|_{\gamma+\frac{d}{2}}$ grand,

$$(1) \qquad |\lambda_1(-\Delta - V)|^\gamma \leq L^1_{\gamma,d}\,(1 + o_\mu(1)) \int_{\mathbb{S}^d} V^{\gamma+\frac{d}{2}}\; d\omega$$

D'où vient le comportement asymptotique de $\alpha(\mu)$ pour μ grand ?

Rappelons la définition de $\mu(\alpha)$:

$$\mu(\alpha) := \inf_{\substack{u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^d, d\sigma) \\ \int_{\mathbb{S}^d} |u|^q \, d\sigma = 1}} \frac{\|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^d)} + \alpha \, \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^d)}}{\|u\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{S}^d)}}$$

Si l'on définit le problème associé sur l'espace Euclidien

$$\mathsf{K}_{q,d} := \inf_{v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} + \|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)}}{\|v\|^2_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)}} \,,$$

alors on peut démontrer que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha^{\vartheta - 1} \mu(\alpha) = \frac{\mathsf{K}_{q,d}}{\kappa_{q,d}} \,, \qquad \vartheta := d \, \frac{q-2}{2\,q} \,.$$

en particulier, en utilisant comme fonctions tests des fonctions qui se concentrent autour d'un point quelconque de la sphère S^d.

Remarque.- Une fonction concentrée, quand on la déconcentre, nous amène vers une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$. “En étirant "une petite région de S^d “on tend" vers $\mathbb{R}^d$ ...

Notre résultat pour des potentiels répulsifs

THM [Dolbeault-E-Laptev].- Soit W un potentiel positif. Soient $d \geq 1$, $p \in (0,+\infty)$. Il existe une fonction croissante $\nu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\nu(\beta) = \beta$ dans l'intervalle $\beta \in \left[0, \frac{d}{2}\,(p+1)\right]$ si $p > 1$, concave pour $\beta \in \left(\frac{d}{2}\,(p+1), +\infty\right)$, telle que

$$\lambda_1(-\Delta + W) \geq \nu\big(\beta\big) \quad \text{with} \quad \beta = \|W^{-1}\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{S}^d)}^{-1}\,,$$

pour n'importe quel potentiel positif W tel que $W^{-1} \in \mathrm{L}^p(\mathbb{S}^d)$. De plus, pour des valeurs grandes de β, nous avons

$$\nu(\beta)^{-\,(p+\frac{d}{2})} \lesssim \mathrm{L}^1_{-(p+\frac{d}{2}),d}\,\left(\kappa_{q,d}\,\beta\right)^{-p}\;.$$

L'estimation ci-dessus est optimale dans le sens que pour tout $\beta > 0$ et tout p il existe un potential positif W satisfaisant $\beta^{-1} = \|W^{-1}\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{S}^d)}$ et $\lambda_1(-\Delta + W) = \nu(\beta)$.

Si $\beta \leq \frac{d}{2}\,(p+1)$ et $p > 1$, l'égalité est atteinte pour des potentiels constants.

Conséquences spectrales pour les potentiels répulsifs

Corollaire [Dolbeault-E-Laptev].- Considérons $d \geq 1$ et $\gamma > d/2$. Pour $\beta = \|W^{-1}\|^{-1}_{\mathrm{L}^{\gamma-\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)}$ grand, nous avons

$$\big(\lambda_1(-\Delta + W)\big)^{-\gamma} \lesssim \mathrm{L}^1_{-\gamma,d} \int_{\mathbb{S}^d} W^{\frac{d}{2}-\gamma}\, d\omega\,.$$

Mais si $\gamma \geq \frac{d}{2} + 1$ et si $\beta = \|W^{-1}\|^{-1}_{\mathrm{L}^{\gamma-\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)} \leq \frac{1}{4}\, d\,(2\,\gamma - d + 2)$, alors,

$$\big(\lambda_1(-\Delta + W)\big)^{\frac{d}{2}-\gamma} \leq \int_{\mathbb{S}^d} W^{\frac{d}{2}-\gamma}\, d\omega\,,$$

et cette estimation est optimale.

Remarque.- Ces résultats sont de nouveau des conséquences d'un résultat d'interpolation bien adapté et de l'étude de la meilleure constante correspondante.

Pour l'étude de cette meilleure constante on utilise encore le même résultat de rigidité de Bidaut-Véron – Véron pour les normes petites, et un argument de concentration pour les normes grandes.

Cas de variétés compactes régulières sans bord générales

Soit $(\mathcal{M}, g)$ une variété régulière compacte sans bord de dimension d et appelons λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta_g$.
On peut démontrer des résultats équivalents à ceux obtenus pour la sphère :

Soit $d \geq 1$ et soit V un potentiel négatif. Pour $\mu = \|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)}$ grand nous avons :

$$(1) \qquad |\lambda_1(-\Delta - V)|^\gamma \leq L^1_{\gamma,d}\,(1 + o_\mu(1)) \int_{\mathbb{S}^d} V^{\gamma+\frac{d}{2}}\; d\omega$$

si $\gamma > \max\{0, 1 - d/2\}$ ou si $\gamma = 1/2$ et $d = 1$.

Néanmoins, si $\mu = \|V\|_{\mathrm{L}^{\gamma+\frac{d}{2}}(\mathbb{S}^d)} \leq \Lambda^\star_g$, alors,

$$(2) \qquad |\lambda_1(-\Delta - V)|^{\gamma+\frac{d}{2}} \leq \int_{\mathbb{S}^d} V^{\gamma+\frac{d}{2}}\; d\omega$$

pour tout $\gamma \geq \max\{0, 1 - d/2\}$ et cette estimation est optimale.

Le comportement de la fonction $\alpha(\mu)$ pour μ grand est de nouveau dû à un phénomène de concentration autour d'un point de la variété (à courbure maximale probablement).

Pour prouver que la fonction $\alpha(\mu)$ satisfait $\alpha(\mu) = \mu$ pour μ petit, il faut encore un résultat de rigidité. On définit

$$\rho := \inf_{\mathcal{M}} \inf_{\xi \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathfrak{R}(\xi\,,\xi)$$

THM [Licois-Véron].- Soient $d \geq 2$ et ρ positive. Si λ est un nombre positif tel que

$$\lambda \leq (1-\theta)\,\lambda_1 + \theta\,\frac{d\,\rho}{d-1} \quad \text{où} \quad \theta = \frac{(d-1)^2\,(p-1)}{d\,(d+2)+p-1}\;,$$

alors, pour tout $p \in (2, 2^*)$, l'équation

$$-\,\Delta_g v + \frac{\lambda}{p-2}\,\left(v - v^{p-1}\right) = 0$$

a une unique solution positive $v \in C^2(\mathcal{M})$, qui est constante et égale à 1.

Remarque.- D'autres résultats intermédiaires ont été obtenus par Bidaut-Véron et Véron et par Bakry et Ledoux.

Corollaire.- La constante $\Lambda_g^\star$ qui définit l'intervalle des μ tels que $\alpha(\mu) = \mu$ satisfait

$$\Lambda_g^\star \geq (1-\theta)\,\lambda_1 + \theta\,\frac{d\,\rho}{d-1}$$

Nos résultats de rigidité (avec l'aide d'un nouveau flot) [Dolbeault-E-Loss]

Sans rentrer dans les détails,

- Nous pouvons nous passer de l'hypothèse que ρ est positive.

- Nous améliorons l'estimation par en dessous de la constante $\Lambda_g^\star$ qui délimite la taille des normes de V pour lesquels les potentiels optimaux dans l'estimation spectrale sont les potentiels constants.

- Nous faisons cela en considérant un nouveau flot sur la variété qui a des propriétés intéréssantes :

$$u_t = u^{2-2\,\beta}\left(\Delta_g u + \kappa\,\frac{|\nabla u|^2}{u}\right)\;;\quad \kappa = 1+\beta\,(p-2)\ \text{ et } \beta\ \text{ bien choisie.}$$

- Ce flot contracte les deux côtés de l'inégalité

$$\int_{\mathfrak{M}} \nabla v\, d\,v_g 2^2 \geq \frac{\lambda}{p-2}\,\left[\int_{\mathfrak{M}} v\, d\,v_g p^2 - \|v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^d)}\right]\quad \forall\, v\in \mathrm{H}^1(\mathfrak{M})\;.$$

et aussi la fonctionnelle

$$\mathcal{F}[u] := \int_{\mathfrak{M}} |\nabla(u^\beta)|^2\, d\,v_g + \frac{\lambda}{p-2}\left[\int_{\mathfrak{M}} u^{2\,\beta}\, d\,v_g - \left(\int_{\mathfrak{M}} u^{\beta\,p}\, d\,v_g\right)^{2/p}\right]\;.$$