Recherche des instabilités dans les modèles de front de détonation

Olivier Lafitte

LAGA – Université de Paris 13

Séminaire du laboratoire Jacques Louis Lions, 14/12/12

Collaborateurs

- Mark Williams (University of North Carolina, Chapel Hill)
- Kevin Zumbrun (Indiana University, Bloomington)
- Travail soutenu par l'université de l'Indiana (séjours d'O. L et de M.W.)

Plan

Plan

Plan

Plan

Plan

Origine du problème

Wood (1954)
Wood et Salzburg (1960)
Ritchmeyer (1960)
Fay (1961)
Erpenbeck (1962-1964-1965)
Majda (1983)
Short-Stewart (1997)
Jenssen-Lyng-Williams (2005)
Humpherys-Zumbrun (2010)
LWZ (2012).

Modélisation

Equations d'Euler compressibles, en inconnues $v = \rho^{-1}, \vec{u}, S, \lambda$, la loi d'état de pression étant donnée en fonction des variables d'état, λ étant le taux de réaction chimique.

Etudier les instabilités se fait en étudiant une perturbation d'une solution monodimensionnelle du système d'EDP non linéaire.

Situation non perturbée: un choc plan de vitesse $\vec{D} = D\vec{e}_1$ passe dans le milieu, et dans la zone réactive la réaction chimique s'établit et ne dépend que de x_1. On fixe l'origine des temps telle que:

$$\text{le choc est à } t = 0 \text{ sur le plan } x_1 = 0.$$

On introduit, à $t = 0$, une perturbation de l'état du fluide, le choc étant supposé être au plan $x_1 = 0$ à $t = 0$ pour l'état non perturbé. On suppose que cela ne fait que déformer le choc.

Modélisation (2)

Hypothèse de base: équation du choc perturbé $x_1 = \varphi(x', t)$. Cela interdit d'atteindre le régime des 'champignons de Rayleigh-Taylor'.
Problème étudié:
pour $x_1 < \varphi(x', t)$: fluide au repos
pour $x_1 > \varphi(x', t)$: zone réactive
relations de Rankine-Hugoniot sur la surface $x_1 = \varphi(x', t)$.

Similitudes et différences avec d'autres modèles:

modèle de **l'instabilité au front d'ablation**: la solution stationnaire est définie dans tout l'espace, grâce à la loi d'état.
modèle de **l'instabilité de Rayleigh-Taylor** ou de **l'instabilité de Kelvin-Helmholtz**: la solution stationnaire est la donnée du problème.
Pas de discontinuités.

Modélisation (3)

On suppose donné l'état gauche, et on a l'état droit par RH:

$$\begin{cases} (\frac{\vec{D}-\vec{u}}{v})_+ .n = (\frac{\vec{D}-\vec{u}}{v})_- .n \\ p_+ - p_- = m^2(v_- - v_+) \\ E_+ - E_- = \frac{1}{2}(p_+ + p_-)(v -_- v_+) \\ \vec{u}_+ \wedge n = \vec{u}_- \wedge n \\ \lambda_+ = \lambda_- \end{cases}$$

On introduit le nouveau système de coordonnées, permettant de suivre le choc:

$$x = x_1 - \varphi(x', t), y' = x',$$

puis $\tilde{\varphi}(y', t) = \varphi(y', t) - Dt$, $\tilde{u} = u - De_1$.

Modélisation (4)

Système:

$$D_t v - v\text{div}\tilde{u} - \partial_x v D_t\tilde{\varphi} + \partial_x\tilde{u}.\nabla\tilde{\varphi} = 0$$
$$D_t\tilde{u} + v\nabla p - D_t\tilde{\varphi}\partial_x\tilde{u} - v\partial_x p\nabla\tilde{\varphi} = 0$$
$$D_t S - \partial_x S D_t\tilde{\varphi} = F_s, D_t\lambda - \partial_x\lambda D_t\tilde{\varphi} = F_\lambda$$

avec $D_t = \partial_t + \tilde{u}.\nabla$.
Vecteur normal $n = N^{-1}[e_3 - \partial_y\tilde{\varphi}e_2 - \partial_z\tilde{\varphi}e_3]$,
$N^2 = 1 + (\partial_y\tilde{\varphi})^2 + (\partial_z\tilde{\varphi})^2$
Vitesse normale $\vec{D} = N^{-1}[D - \partial_t\tilde{\varphi}]n$.
Conditions de RH.
LINEARISATION autour d'une solution ne dépendant que de x de $(v, \tilde{u}, S, \lambda, \tilde{\varphi})$.

Plan

Réduction aux modes normaux

Equations linéarisées (coefficients ne dépendant que de x)

$$\partial_t \tilde{q} + A_x \partial_x \tilde{q} + A_y \partial_y \tilde{q} + A_z \partial_z \tilde{q} + B\tilde{q} + g_0 \partial_t \tilde{\psi} + g_2 \partial_y \tilde{\psi} + g_3 \partial_z \tilde{\psi} = 0$$

$$\tilde{q}(0_+, y, z, t) = Y.\tilde{q}(0_-, y, z, t) + h_0 \partial_t \tilde{\psi} + h_2 \partial_y \tilde{\psi} + h_3 \partial_z \tilde{\psi}.$$

Modes normaux $\tilde{q} = e^{t\tau + i\epsilon y} q(x, \tau, \epsilon)$:
Recherche de solutions associées à $\Re\tau > 0$: instabilités. Système:

$$\frac{dq}{dx} = P(x, \epsilon, \tau) q + f(x, \epsilon, \tau)$$
$$q(0_+, \epsilon, \tau) = Y(\tau, \epsilon) q(0_-, \tau, \epsilon) + \psi(\tau, \epsilon)(\tau h_0 + i\epsilon h_2)$$

avec $P(x, \tau, \epsilon) = -A_x^{-1}[B(x) + i\epsilon A_y + \tau I]$,
$f(x, \tau, \epsilon) = A_x^{-1}[q_0(x) - \psi(\tau, \epsilon)(\tau g_0 + i\epsilon g_2)]$.

Résolution de l'équation sur q

Equation homogène associée

$$\frac{dq}{dx} = P(x, \epsilon, \tau) q$$

Matrice fondamentale de solutions $H(x, \epsilon, \tau)$.
Principe de Duhamel:

$$\begin{aligned} q(x, \epsilon, \tau) = \quad & H(x, \epsilon, \tau)[H^{-1}(0, \epsilon, \tau) q(0_+, \epsilon, \tau) \\ & + \int_0^x H^{-1}(x', \epsilon, \tau) f(x', \epsilon, \tau) dx']. \end{aligned}$$

On cherche les solutions tendant vers 0 en $+\infty$ du système.

Condition d'existence d'une solution

On montre (sous conditions physiques ad hoc) qu'il n'y a qu'une famille de solutions de $q' = Pq$ qui tend vers l'infini en $+\infty$.
$\Rightarrow$ Dû aux valeurs propres de P(ou celles de $P(+\infty, \epsilon, \tau)$,car propriété importante: $|P(x, \epsilon, \tau) - P(\infty, \epsilon, \tau)| \leq Ce^{-\beta x}$.)
Quatre de partie réelle négative, une de partie réelle positive.

Comment identifier les solutions tendant vers 0 en $+\infty$ de notre problème?
Notre solution de l'équation inhomogène ne doit pas tendre vers l'infini

$\Rightarrow$ famille de solutions de l'équation adjointe qui tend vers 0 en $+\infty$ de dimension 1$\Rightarrow$ donnée initiale $\theta(0,\epsilon,\tau)$.

$$\begin{aligned} q(x,\epsilon,\tau) = \quad & H(x,\epsilon,\tau)[H^{-1}(0,\epsilon,\tau)q(0_+,\epsilon,\tau) \\ & + \int_0^{+\infty} H^{-1}(x',\epsilon,\tau)f(x',\epsilon,\tau)dx' \\ & + \int_{+\infty}^{x} H^{-1}(x',\epsilon,\tau)f(x',\epsilon,\tau)dx']. \end{aligned}$$

$f(x,\tau,\epsilon) = A_x^{-1}[q_0(x) - \psi(\tau,\epsilon)(\tau g_0 + i\epsilon g_2)]$.
On en déduit une égalité sur $q(0_+,\epsilon,\tau)$:

$$\theta(0,\epsilon,\tau).q(0_+,\epsilon,\tau) = -b_*(\epsilon,\tau) + \psi(\epsilon,\tau)[\tau b_0 + i\epsilon b_2]$$

On remplace $q(0_+,\epsilon,\tau)$ par $Y.q(0_-,\epsilon,\tau) + \psi(\epsilon,\tau)[\tau h_0 + i\epsilon h_2]$.

$\Rightarrow$ équation sur $\psi(\epsilon,\tau)$ de la forme $V(\epsilon,\tau).\psi(\epsilon,\tau) = S$.
Quantité V: déterminant de Lopatinski généralisé (à une constante près).

$$V(\epsilon,\tau) = \tau b_0 + i\epsilon b_2 - \theta(0,\epsilon,\tau)(\tau h_0 + i\epsilon h_2)$$

Plan

Construction de solutions données en $+\infty$

Notations de LWZ ou Erpenbeck.
Recherche des solutions haute fréquence: $\tau = \epsilon\zeta + \nu$, $|\nu| \leq R$.
Matrice $\Phi_0(x,\zeta) = -\lim_{\epsilon\to+\infty}\epsilon^{-1}P^T$

Quantités physiques: $c_0(x)$: vitesse du son, $u(x)$ vitesse de l'écoulement, $v(x)$ donné par l'équation d'état, $M(x) = u_0(x)/c_0(x)$ nombre de Mach, $\eta = 1-(M(x))^2$.

Valeurs propres de Φ_0:

$$\frac{\zeta}{u(x)} \text{ (mult. 3) }, \mu_\pm = -\frac{M^2}{(1-M^2)u}(\zeta \pm Ms)$$

avec $s^2 = \zeta^2 + c_0^2\eta, \Re s > 0$ ($\Re\zeta > 0$ ou ($\Re\zeta = 0$ et $\Im\nu > 0$)).
Dans $\Re\zeta > 0$: seule valeur propre de partie réelle négative est μ_+.
Vecteur propre associé:

$$P_0 + sQ_0$$

Egalités: $\mu_+ - \mu_- = -\frac{2s}{c_0(1-M^2)}$, $\mu_+ - \frac{\zeta}{u} = -\frac{\zeta+Mu}{u(1-M^2)}$.

Le Gap Lemma s'applique lorsque $\Re s > 0$.

$\Rightarrow$ Séparation spectrale (même dans le cas $\mu_- = \frac{\zeta}{u}$, où l'espace propre associé à $\frac{\zeta}{u}$ dégénère)

Dans ce cas, on peut parler de **la** solution équivalente à $(P_0 + sQ_0)^{\infty} e^{\mu_+ x}$ en $+\infty \Rightarrow$ normalisation de θ.

Proposition

On suppose qu'il n'y a pas de 'turning point' ($s = 0$) pour $x \in [0, +\infty[$, et plus précisément que $\Re s > 0$ sur $[0, +\infty[$. Pour tout $R > 0$, il existe une constante $\epsilon(\zeta, R)$ telle que ($\tau = \epsilon\zeta + \nu$)

$$|\nu| \leq R, \epsilon \geq \epsilon(\zeta, R) \rightarrow V(\tau, \epsilon) \neq 0$$

et donc pas de mode instable.

La preuve s'appuie sur la construction de solutions utilisant $|\mu_+(x,\zeta+\epsilon^{-1}\nu)-\mu_j(x,\zeta+\epsilon^{-1}\nu)|\geq C_\zeta$ pour $\epsilon\geq\epsilon_0(\zeta,\nu)$.
En résumé, on se ramène en conjuguant à:

$$Z'=\epsilon[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G-\mu_+^\star I \end{pmatrix}+\epsilon^{-2}B]Z$$

($\mu_+^\star$ est une $\epsilon^{-1}e^{-\beta x}$perturbation de μ_+, $x\geq 0$).
Ce système se résout avec un 'gap lemma' à coefficients variables (équation de Volterra).
Les solutions tendant vers 0 en $+\infty$ de $\theta'=-P^T(x,\tau,\epsilon)\theta$ sont

$$\begin{gathered}|\theta_K(x,\tau,\epsilon)-Ke^{\epsilon\int_0^x\mu_+^\star(x',\zeta+\epsilon^{-1}\nu)dx'}[(P_0+sQ_0)(x,\zeta))+o(\epsilon^{-1})]| \\ \leq C|K|\epsilon^{-1}|e^{\epsilon\int_0^x\mu_+^\star(x',\zeta+\epsilon^{-1}\nu)dx'}|e^{-\delta_\star x}.\end{gathered}$$

Existence et unicité pour chaque K
Résultat valable sur $[x_*+\delta,+\infty[$ si x_* est le point singulier maximum.

Fin de la démonstration

Un calcul...
$\epsilon^{-1}V(\epsilon\zeta+\nu,\epsilon)=\zeta b_0+ib_2-\theta(0)(\zeta h_0+ih_2)+O(\epsilon^{-1}\nu)$, $\theta=\theta_1$.

Second membre équivalent à $-\theta(0)[\zeta h_0+ih_2]$

Terme lui même équivalent à $-(P_0+sQ_0)(0,\zeta)(\zeta h_0+ih_2)$, h_0 et h_2 étant des valeurs liées au saut du choc.
Valeur:

$$\frac{-u_-(1-\chi)}{(1-M_+^2)u_+u_-}[\zeta(\zeta+M_+s_+)(2-(1-\eta_+)(1-\chi)v_-P_S/T+\eta_+(u_+u_--\zeta^2)].$$

Non nul.
Problème lorsque $s=0$: les deux valeurs propres μ_+ et μ_- se confondent, avec perte de multiplicité (Turning point sur la variété stable).

Plan

Géométrie des points singuliers

Dans le cas où s^2 s'annule sur $[0,+\infty[$, la matrice n'est plus diagonalisable et la valeur propre μ_- croise μ_+.
On considère $\zeta = i|\zeta|$, et on introduit x_* l'unique valeur (hyp.) telle que $c_0^2(x) - u^2(x) = |\zeta|^2$. On suppose $\frac{d}{dx}(c_0^2 - u^2)(x_*) \neq 0$.
Les valeurs propres et vecteurs propres sont
$\mu_\pm(x) = \mu_0(x) \mp sr(x)$, $P_0 \mp sQ_0$.

$$\Phi_0 P_0 = \mu_0 P_0 + s^2 r Q_0, \Phi_0 Q_0 = r P_0 + \mu_0 Q_0.$$

Matrice associée $\begin{pmatrix} 0 & r \\ rs^2 & 0 \end{pmatrix} + \mu_0 I$.

$$u_0' = \epsilon r v_0, v_0' = \epsilon s^2 r u_0 \Rightarrow (\frac{u_0'}{r})' = \epsilon^2 r(c_0^2 - u^2 - |\zeta|^2)u_0.$$

On introduit $\rho(x)$ telle que
$(\rho'(x))^2\rho(x) = s^2 r^2 = \frac{\kappa^2}{\eta^2 u^2}(c_0^2 - u^2 - |\zeta|^2)$, et $\varphi_0' = \mu_0 = -\frac{\kappa^2}{\eta}\frac{\zeta}{u}$.

Les deux cas fondamentaux

$$\frac{d}{dx}(c_0^2 - u^2) < 0 \Rightarrow \rho \text{ décroissante (cas D)}$$

Dans ce cas, on a une solution $\theta(0) \simeq P_0 + sQ_0$ et V ne s'annule pas.

$$\frac{d}{dx}(c_0^2 - u^2) > 0 \Rightarrow \rho \text{ croissante (cas I)}$$

Solution le long de Q_0.
On a une série de valeurs de la forme

$$\epsilon = [(2n - \frac{1}{2})\pi - \beta_3 \Im\nu]\beta_1^{-1}$$

pour lesquelles $V(i\zeta + \nu, \epsilon)$ a un zéro au voisinage.
Déception: je ne compte pas donner la preuve de ce résultat aujourd'hui...

Méthode des contours paramétriques

Fonctions entrant en ligne de compte holomorphes
Le but est d'étudier les solutions de $\theta' = \epsilon\Phi_0\theta$ à partir d'une famille de solutions asymptotiques $P_i(z,\epsilon)e^{q_i} = Pe^Q$, $1 \leq i \leq N$.
$(Pe^Q)' = \epsilon\Phi_0(Pe^Q) + \epsilon(\Phi_0^m - \Phi_0)Pe^Q$, $\Phi_0^m - \Phi_0$ petit en ϵ (comme $C\epsilon^{-m-1}|e^Q|$).

Théorème

i) On suppose que P^{-1} est borné uniformément pour ϵ grand
ii) On suppose qu'il existe, pour chaque $j \geq 2$, un point z_j tel que tout point z peut être relié par un chemin sur lequel $\Re\int_{z_j}^{z}(\mu_j - \mu_1)dz'$ est décroissant de z_j à z. On suppose que la longueur cumulée de tous les chemins est majorée.
Il existe une solution de $\theta' = \epsilon\Phi_0\theta$ telle que

$$|\theta(z) - P_1(z)e^{q_1(z)}| \leq C_m\epsilon^{-m-1}|e^{q_1}|.$$

Idée de la preuve

On utilise le principe de Duhamel. On note $P_2 = [P_1, P_2, 0....]$, $P_{(3)} = [0, 0, P_3, ...]$

$$\theta = \theta_1 + \epsilon P_2 e^{Q(z,\epsilon)} \int_{z_2}^{z} e^{-Q(z',\epsilon)} [P^{-1}(z',\epsilon)(\Phi_0 - \Phi_0^m)(z',\epsilon)]\theta dz' + \epsilon P_{(3)} \ldots$$

On construit les itérées. On trouve

$$|(\theta_{(l+1)} - \theta_{(l)})e^{-q_1(z)}| \leq \frac{C_2 L}{\epsilon^{m+1}} \max |(\theta_{(l)} - \theta_{(l-1)})e^{-q_1(z)}|$$

grâce à P^{-1} borné, et $\Re \int_{z'}^{z} (\mu_j - \mu_1) dz' \leq 0$.
Série convergente pour ϵ assez grand.
Méthode de construction permettant de contourner le point singulier.

Comportement de la solution décroissante en $+\infty$

But: prolonger pour $x < x_* + \delta$ l'unique solution telle que

$$|\theta - e^{\epsilon \int_0^x \mu_+(x')dx'}[(P_0 + sQ_0)(x) + O(\epsilon^{-1})]| \leq C\epsilon^{-1} e^{\epsilon \int_0^x \mu_+(x')dx'}.$$

Théorème

i) Dans le cas I, il existe G^I et α telle que

$$|G^I(\epsilon,\zeta,\nu)\theta(0,\zeta,\nu,\epsilon) - (P_0 + sQ_0 + \alpha(\epsilon,\zeta,\nu)(P_0 - sQ_0))| \leq C\epsilon^{-1}$$

ii) Dans le cas D, il existe G^D tel que

$$|G^D(\epsilon,\zeta,\nu)\theta(0,\zeta,\nu,\epsilon) - (P_0 + sQ_0)| \leq C\epsilon^{-1}$$

Dans les deux items, les quantités P_0, Q_0 et s sont calculées à $x = 0$.

Une autre méthode d'analyse (ma fonction favorite)

On réécrit le système en utilisant $R^5 = Vect(P_0, Q_0, T_3, T_4, T_5)$.
Matrice Φ_0 dans cette base

$$\begin{pmatrix} -\frac{\kappa^2}{\eta}\frac{\zeta}{u} & -\frac{\kappa}{\eta u} & 0 & 0 & 0 \\ -s^2\frac{\kappa}{\eta u} & -\frac{\kappa^2}{\eta}\frac{\zeta}{u} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta}{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta}{u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta}{u} \end{pmatrix}$$

Construction de l'analogue de Pe^Q sous la forme (cas D)

$$e^{i\epsilon\varphi_0}((\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}Ai(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho(x))P_0+\epsilon^{-\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}Ai'(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho(x))Q_0)$$

$$e^{i\epsilon\varphi_0}((\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}Ai(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\rho(x))P_0+\epsilon^{-\frac{1}{3}}e^{-i\frac{2\pi}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}Ai'(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\rho(x))Q_0)$$

$$P_3e^{q_3}\dots$$

La formule d'intégration sur les contours (MMP) est toujours valable,
et on connait la croissance en ϵ pour $\Re\rho > 0$ et pour $\Re\rho$ négatif des fonctions d'Airy.

$$e^{i\epsilon\varphi_0}((\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}Ai(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho(x))Q_0+\epsilon^{-\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}Ai'(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho(x))P_0)$$

est égale (à un coeff. près) à θ_1 pour $x > x_*$ et pour $x < x_*$.
Comportement en l'infini
$(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho)^{-\frac{1}{4}}P_0 - \epsilon^{-\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho)^{\frac{1}{4}}Q_0$.
On peut ainsi calculer θ_1 en $x = 0$.

$$\begin{aligned}\theta_1(0,\zeta\epsilon+\nu,\epsilon) = \quad & (\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}(0)Ai(\epsilon^{\frac{2}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho(0))Q_0(0) \\ & +\epsilon^{-\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}(0)Ai'(\epsilon^{-\frac{1}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}\rho(0))P_0(0)\end{aligned}$$

On utilise $Ai(-e^{i\frac{2\pi}{3}}X) \simeq CX^{-\frac{1}{4}}e^{i\frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}}$.
Comportement en $e^{i\epsilon(\frac{2}{3}(\rho(0))^{\frac{3}{2}})}(P_0(0) + s(0)Q_0(0))$.

Construction de l'analogue de Pe^Q sous la forme (cas I)

$$e^{i\epsilon\varphi_0}((\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}Ai(\epsilon^{\frac{2}{3}}\rho(x))P_0+\epsilon^{-\frac{1}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}Ai'(\epsilon^{\frac{2}{3}}\rho(x))Q_0)$$

$$e^{i\epsilon\varphi_0}((\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}Bi(\epsilon^{\frac{2}{3}}\rho(x))P_0+\epsilon^{-\frac{1}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}Bi'(\epsilon^{\frac{2}{3}}\rho(x))Q_0)$$

$$P_3e^{q_3}...$$

La formule d'intégration sur les contours (MMP) est toujours valable, et on connait la croissance en ϵ pour $\Re\rho > 0$ et pour $\Re\rho$ négatif des fonctions d'Airy Ai et Bi.

$$e^{i\epsilon\varphi_0}((\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{-\frac{1}{2}}Ai(\epsilon^{\frac{2}{3}}\rho(x))P_0 + \epsilon^{-\frac{1}{3}}(\frac{\eta u}{\kappa}\rho')^{\frac{1}{2}}Ai'(\epsilon^{\frac{2}{3}}\rho(x))Q_0)$$

est égale à $C\theta_1$ pour $x > x_*$ et à $C'(\theta_1 + \alpha\theta_2)$ pour $0 < x < x_*$.
La constante C se calcule avec la limite en $+\infty$.
On utilise pour retrouver α
$Ai(-X) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}X^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4})(1 + O(X^{-\frac{1}{3}}))$.
On peut ainsi calculer θ_1 en $x = 0$.
Ceci permet d'avoir le résultat déjà obtenu (LWZ) avec les zéros.

Conclusion

Problème de détonation totalement traité. Nécessite pour le moment des données physiques holomorphes.
Système avec choc traité comme un système sur tout l'espace.
Séparation spectrale: très importante.
En présence de points singuliers, méthode des contours paramétriques étend la solution à l'infini dans une zone d'holomorphie avec contours particuliers.
Diagonalisation par blocs nécessaire.
Fonction spéciale favorite!!!.
Ne marche pas quand on a un point de maximum: revenir aux Bessel.
Ce n'est pas cette méthode non plus si le point singulier est en 0 ou à l'infini.