Euler 2D dans des domaines non réguliers

Christophe Lacave

Université de Paris Diderot (Paris VII), France

partiellement en collaboration avec David Gérard-Varet (Paris VII)

Séminaire du LJLL, Paris, 27 Janvier 2012

Plan de l'exposé

Plan de l’exposé

1. Solution forte dans un domaine régulier
2. Solution faible dans 2 domaines non réguliers
3. Existence de solution faible dans les domaines singuliers
   - Domaines bornés simplement connexes
   - Domaines bornés avec un nombre fini de trous
   - Domaines non bornés avec un trou
4. Loi de Biot-Savart dans les domaines simplement connexes
5. Unicité des solutions faibles dans quelques domaines singuliers
   - Propriétés de la solution
   - Méthode de Liapounov
   - Preuve de l’unicité

Plan de l'exposé

1. **Solution forte dans un domaine régulier**
2. **Solution faible dans 2 domaines non réguliers**
3. **Existence de solution faible dans les domaines singuliers**
   - Domaines bornés simplement connexes
   - Domaines bornés avec un nombre fini de trous
   - Domaines non bornés avec un trou
4. **Loi de Biot-Savart dans les domaines simplement connexes**
5. **Unicité des solutions faibles dans quelques domaines singuliers**
   - Propriétés de la solution
   - Méthode de Liapounov
   - Preuve de l'unicité

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Equations d'Euler

Soit $u = (u_1, u_2)$ la vitesse d'un fluide idéal incompressible se déplaçant dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit p la pression du fluide. L'évolution d'un tel fluide est gouverné par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p (+g) & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } [0,\infty) \times \Omega \\ u \cdot n = 0 & \text{dans } [0,\infty) \times \partial\Omega \\ \lim_{|x|\to\infty} |u| = 0 & \text{pour } t \in [0,\infty) \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Résultats connus

Si u_0 est régulier alors il existe une unique solution forte globale aux équations d'Euler quand

- Ω est un domaine borné régulier (Wolibner, 1933)
- Ω est le plan en entier $\mathbb{R}^2$ (McGrath, 1967)
- Ω est un domaine extérieur régulier (Kikuchi, 1983)

Une quantité importante pour ce problème est le tourbillon/vorticité :

$$\omega = \mathrm{rot}\, u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 .$$

Equation de la vorticité :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0$$

Remarque

$$\omega_0 \in L^p \Longrightarrow \omega(t,\cdot) \in L^p \; \forall t > 0.$$

Si $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(\Omega)$, alors il existe une unique solution faible globale aux équations d'Euler quand le domaine est régulier (Yudovich, 1963).
Si $\omega_0 \in L^1 \cap L^p(\Omega)$ (avec $p > 1$), alors il existe une solution faible globale aux équations d'Euler quand le domaine est régulier (Diperna-Majda, 1987).

Estimation de u ?
Le noyau de Biot et Savart correspond à des opérateurs $\nabla\Delta^{-1}$, qui ne vérifient des bonnes estimations que pour $\partial\Omega \in C^{1,1}$ (au moins).

Plan de l'exposé

Les domaines convexes

Proposition

Si Ω est convexe, la solution ψ du problème de Dirichlet

$$\Delta\psi = f \ \textit{ dans } \ \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0$$

appartient à $H^2(\Omega)$ quand le terme de source f appartient à $L^2(\Omega)$, sans aucune hypothèse sur la régularité du domaine.

Théorème (Taylor, 2000)

Il existe une solution faible globale aux équations d'Euler quand Ω est un domaine borné convexe.

L'extérieur d'un arc de Jordan

Soit Γ un arc de Jordan de classe C^2, et $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Théorème (C.L., 2009)

Soit u_0 une donnée initiale telle que $\mathrm{rot}\, u_0 \in L^\infty_c(\Omega)$, alors il existe une solution faible globale aux équations d'Euler.

Remarque

u est continue jusqu'à Γ, avec des valeurs différentes de chaque côté, sauf aux extrémités où u explose comme $1/\sqrt{|x|}$.

Plan de l'exposé

1. Solution forte dans un domaine régulier
2. Solution faible dans 2 domaines non réguliers
3. **Existence de solution faible dans les domaines singuliers**
   - Domaines bornés simplement connexes
   - Domaines bornés avec un nombre fini de trous
   - Domaines non bornés avec un trou
4. Loi de Biot-Savart dans les domaines simplement connexes
5. Unicité des solutions faibles dans quelques domaines singuliers
   - Propriétés de la solution
   - Méthode de Liapounov
   - Preuve de l'unicité

Plan de l'exposé

Domaines bornés simplement connexes

Hypothèse

Ω est un domaine borné simplement connexe.

Ω est une limite au sens d'Hausdorff de Ω_n (ouvert régulier simplement connexe)

γ-convergence d'ouverts bornés

Soit $\Omega_n \subset D$. On dit que $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γ-converge vers $\Omega \subset D$ si pour tout $f \in H^{-1}(D)$, la suite de solutions $\psi_n \in H^1_0(\Omega_n)$ de

$$-\Delta\psi_n = f \text{ dans } \Omega_n, \quad \psi_n|_{\partial\Omega_n} = 0.$$

converge fortement dans $H^1_0(D)$ vers la solution $\psi \in H^1_0(\Omega)$ de

$$-\Delta\psi = f \text{ dans } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Théorème (Sverak, 1993)

Nous supposons que le nombre de composante connexe de $D \setminus \Omega_n$ est uniformément borné dans n. Si $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens d'Hausdorff vers Ω, la suite γ-converge vers Ω.

γ-convergence d'ouverts bornés

Soit $\Omega_n \subset D$. On dit que $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γ-converge vers $\Omega \subset D$ si pour tout $f \in H^{-1}(D)$, la suite de solutions $\psi_n \in H^1_0(\Omega_n)$ de

$$-\Delta\psi_n = f \ \text{ dans } \ \Omega_n, \quad \psi_n|_{\partial\Omega_n} = 0.$$

converge fortement dans $H^1_0(D)$ vers la solution $\psi \in H^1_0(\Omega)$ de

$$-\Delta\psi = f \ \text{ dans } \ \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Proposition (convergence de Mosco)

$(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γ-converge vers Ω si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $\psi \in H^1_0(\Omega)$, il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec ψ_n dans $H^1_0(\Omega_n)$ qui converge vers ψ.
2. Pour toute suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec ψ_n dans $H^1_0(\Omega_n)$, convergeant faiblement vers ψ dans $H^1_0(D)$, $\psi \in H^1_0(\Omega)$.

Approximation

Soit $\Omega_n \to \Omega$ et $\omega^0 := \mathrm{rot}\, u^0 \in L^\infty(\Omega)$. Par troncature et convolution, il existe $\omega_n^0 \in C_c^\infty(\Omega_n)$ tel que

$$\omega_n^0 \to \omega^0 \quad \text{faiblement dans } L^p(\Omega), \quad \|\omega_n^0\|_{L^p} \leq \|\omega^0\|_{L^p}, \quad \forall p \in [1, \infty].$$

Il existe un unique champ de vecteur $u_n^0 \in C_c^\infty(\overline{\Omega_n})$ satisfaisant

$$\mathrm{rot}\, u_n^0 = \omega_n^0, \quad \mathrm{div}\, u_n^0 = 0, \quad u_n^0 \cdot n|_{\partial\Omega_n} = 0.$$

Soit u_n la solution forte aux équations d'Euler dans Ω_n, alors

$$u_n(t,x) \ = \ \nabla^\perp \psi_n^0(t,x)$$

où ψ_n^0 vérifie le problème de Dirichlet

$$\Delta\psi_n^0 \ = \ \omega_n \ := \ \mathrm{rot}\, u_n \ \text{ dans } \ \Omega_n, \quad \psi_n^0|_{\partial\Omega_n} = 0.$$

Partie à noyau

Estimation d'énergie : $\|\nabla\psi_n^0(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\omega_n(t,\cdot)\|_{L^2}\|\psi_n^0(t,\cdot)\|_{L^2}$.
Inégalité de Poincaré sur D : $\|\psi_n^0(t,\cdot)\|_{H_0^1(\Omega_n)} \leq C$.

$\Delta\left(\partial_t\psi_n^0\right) = \partial_t\omega_n = -\mathrm{div}\,(u_n\omega_n)$, $\partial_t\psi_n^0|_{\partial\Omega_n} = 0$
$\Longrightarrow \|\partial_t\psi_n^0(t,\cdot)\|_{H_0^1(D)} \leq C$.

$\psi_n^0 \to \psi^0$ faible* dans $W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(D))$ et fort dans $C^0(0,T;L^2(D))$.
où $\Delta\psi^0(t,\cdot) = \omega(t,\cdot)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec $\psi^0(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$.

$\int\int|\nabla\psi_n^0|^2 = -\int\int\omega_n\psi_n^0 \to -\int\int\omega\,\psi^0 = \int\int|\nabla\psi^0|^2$.
Alors ψ_n^0 vers ψ^0 dans $L^2(0,T;H_0^1(D))$.

Théorème d'existence dans les domaines bornés simplement connexes

Théorème (Gerard Varet - C.L.)

Soit $p > 1$ et u_0 une donnée initiale telle que

$$u^0 \in L^2(\Omega), \quad \mathrm{rot}\, u^0 \in L^p(\Omega), \quad \mathrm{div}\, u^0 = 0, \quad u^0 \cdot n_{|\partial\Omega} = 0,$$

alors il existe une solution faible globale aux équations d'Euler dans Ω telle que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \ \mathrm{rot}\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^p(\Omega)).$$

Résumé : nous avons considéré u_n une solution forte des équations d'Euler sur Ω_n, et nous avons obtenu de la bonne condition au bord grâce à la γ- convergence.

Application : rugosité...

Plan de l'exposé

Domaines bornés avec un nombre fini de trous

Hypothèse

Ω est un domaine borné avec un nombre fini de trous et ces trous sont de capacité positive.

$$\Omega := \widetilde{\Omega} \setminus \left(\cup_{i=1}^{k} \mathcal{C}^i\right), \quad k \in \mathbb{N} \text{ avec}$$

(H1) $\widetilde{\Omega}$ est un ouvert borné simplement connexe ;
$\widetilde{\Omega}$ est une limite au sens d'Hausdorff de $\widetilde{\Omega}_n$ (ouvert régulier simplement connexe)

(H2) $\mathcal{C}^i$ est un compact connexe, $\subset \widetilde{\Omega}$ et $\mathcal{C}^i \cap \mathcal{C}^j = \emptyset \; \forall j \neq i$;

(H3) $\mathrm{cap}(\mathcal{C}^i) > 0$, pour tout $i = 1 \dots k$.

Capacité

$$\mathrm{cap}(E) \ := \ \inf\{\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)},\ v \geq 1 \ \text{p.p dans un voisinage de } E\}.$$

Proposition

1. *Pour tout compact K inclus dans un ouvert borné D,* $\mathrm{cap}(K) = \mathrm{cap}(\partial K)$.
2. *Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est contenu dans une variété de dimension $N-2$, alors $\mathrm{cap}(E) = 0$.*
3. *Si $E \subset \mathbb{R}^N$ contient un morceau d'une hypersurface régulière (variété de N-1), alors $\mathrm{cap}(E) > 0$.*
4. *Si $\Omega \subset D$, alors*

$$\Big(u \in H^1_0(\Omega)\Big) \iff \Big(u \in H^1_0(D) \text{ and } u = 0 \text{ quasiment partout dans } D\backslash\Omega\Big).$$

Approximation

Il existe un unique champ de vecteur $u_n^0 \in C_c^\infty(\overline{\Omega_n})$ satisfaisant

$$\mathrm{rot}\, u_n^0 = \omega_n^0, \quad \mathrm{div}\, u_n^0 = 0, \quad u_n^0 \cdot n|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad \int_{J^i} u_n^0 \cdot \tau ds = \int_{J^i} u^0 \cdot \tau ds.$$

Soit u_n la solution forte aux équations d'Euler Ω_n, alors

$$u_n(t,x) \;=\; \nabla^\perp \psi_n^0(t,x) \;+\; \sum_{i=1}^k \alpha_n^i(t) \nabla^\perp \psi_n^i(x)$$

où ψ_n^0 satisfait le problème de Dirichlet

$$\Delta\psi_n^0 \;=\; \omega_n \;:=\; \mathrm{rot}\, u_n \;\text{ dans }\; \Omega_n, \quad \psi_n^0|_{\partial\Omega_n} = 0$$

où ψ_n^i, $i = 1 \dots k$ sont des fonctions harmoniques vérifiant

$$\Delta\psi_n^i = 0 \text{ dans } \Omega_n, \quad \frac{\partial \psi_n^i}{\partial \tau}|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad \int_{\partial \mathcal{O}_n^j} \frac{\partial \psi_n^i}{\partial n} = \delta_{ij}, \quad \psi_n^i|_{\partial\widetilde{\Omega}_n} = 0.$$

Partie harmonique

Soit $\Delta\phi_n^i = 0$, $\phi_n^i|_{\partial\tilde{\Omega}_n} = 0$, $\phi_n^i|_{\partial\mathcal{O}_n^j} = \delta_{ij}$, alors $\psi_n^i = \sum_{j=1}^k c_n^{i,j}\,\phi_n^j$.

$$\gamma\text{-convergence} \Longrightarrow \phi_n^i \to \phi^i \text{ dans } H_0^1(D).$$

De plus $Id = C_n P_n$ avec $C_n = \left(c_n^{i,j}\right)$ et $P_n = \left(\int_{\Omega_n} \nabla\phi_n^i \cdot \nabla\phi_n^j\right)$.

Lemme

Si $\mathrm{cap}(\mathcal{C}^i) > 0$ $\forall i$, alors P est inversible.

Conclusion : $\psi_n^i \to \psi^i$ dans $H_0^1(D)$.

alpha

$$\alpha_n^i = \int_{\Omega_n} \phi_n^i \omega_n \, dx + \int_{\partial O_n^i} u_n^0 \cdot \tau \, ds.$$

$$\alpha_n^i = \int_{\Omega_n} \phi_n^i \omega_n \, dx + \int_{J^i} u^0 \cdot \tau \, ds - \int_{A_n^i} \omega_n^0 \, dx$$

Alors α_n^i converge faible* dans $L^\infty(0, T)$ (convergence forte plus tard).

Partie à noyau

Estimation d'énergie : $\|\nabla\psi_n^0(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\omega_n(t,\cdot)\|_{L^2}\|\psi_n^0(t,\cdot)\|_{L^2}$.
Inégalité de Poincaré sur D : $\|\psi_n^0(t,\cdot)\|_{H_0^1(\Omega_n)} \leq C$.
Conservation de l'énergie : $\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega_n)} = \|u_n^0\|_{L^2(\Omega_n)} \leq C$.

$\Delta\left(\partial_t\psi_n^0\right) = \partial_t\omega_n = -\mathrm{div}\,(u_n\omega_n)$, $\partial_t\psi_n^0|_{\partial\Omega_n} = 0$
$\Longrightarrow \|\partial_t\psi_n^0(t,\cdot)\|_{H_0^1(D)} \leq C$.

$\psi_n^0 \to \psi^0$ faible* dans $W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(D))$ et fort dans $C^0(0,T;L^2(D))$.
où $\Delta\psi^0(t,\cdot) = \omega(t,\cdot)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec $\psi^0(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$.

$\int\int|\nabla\psi_n^0|^2 = -\int\int\omega_n\psi_n^0 \to -\int\int\omega\,\psi^0 = \int\int|\nabla\psi^0|^2$.
Alors ψ_n^0 vers ψ^0 dans $L^2(0,T;H_0^1(D))$.

Théorème d'existence dans les domaines bornés

Théorème (Gerard Varet - C.L.)

Soit $p > 1$ et u_0 une donnée initiale telle que

$$u^0 \in L^2(\Omega), \quad \mathrm{rot}\, u^0 \in L^p(\Omega), \quad \mathrm{div}\, u^0 = 0, \quad u^0 \cdot n_{|\partial\Omega} = 0,$$

alors il existe une solution faible globale aux équations d'Euler dans Ω telle que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \quad \text{et } \mathrm{rot}\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^p(\Omega)).$$

Résumé : nous avons considéré u_n une solution forte des équations d'Euler sur $\Omega_n := \widetilde{\Omega}_n \setminus \left(\cup_{i=1}^k \overline{\mathcal{O}_n^i}\right)$, et nous avons obtenu de la compacité grâce à la γ- convergence.

Application : capture de fluide...

Plan de l’exposé

Domaines non bornés avec un trou

Hypothèse

Ω est un ouvert avec un seul trou et ce trou est de capacité positive.

$$\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ avec}$$

(H1) $\mathcal{C}$ est un compact connexe ;
$\mathcal{C}$ est une limite d'Hausdorff de $\overline{O_n}$ (ouvert borné régulier simplement connexe).

(H2) $\mathrm{cap}(\mathcal{C}) > 0$.

Approximation

Soit $\Omega_n := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathcal{O}_n}$ et $\omega^0 := \mathrm{rot}\, u^0 \in L^\infty_c(\Omega)$. Par troncature et convolution, il existe $\omega^0_n \in C^\infty_c(\Omega_n)$ tel que

$$\omega^0_n \to \omega^0 \quad \text{faiblement dans } L^p(\Omega), \quad \|\omega^0_n\|_{L^p} \leq \|\omega^0\|_{L^p}, \quad \forall p \in [1,\infty].$$

Soit u_n la solution forte aux équations d'Euler Ω_n, alors

$$u_n(t,x) \;=\; \nabla^\perp \psi^0_n(t,x) \;+\; \alpha_n(t)\nabla^\perp\psi_n(x)$$

où ψ^0_n satisfait le problème de Dirichlet

$$\Delta\psi^0_n = \omega_n := \mathrm{rot}\, u_n \text{ dans } \Omega_n, \quad \psi^0_n|_{\partial\Omega_n} = 0,\ \psi^0_n(x) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|}\Big) \text{ à l'infini;}$$

alors que ψ_n est la fonction harmonique vérifiant

$$\Delta\psi_n = 0 \text{ dans } \Omega_n, \quad \frac{\partial\psi^i_n}{\partial\tau}|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad \int_{\partial\mathcal{O}_n} \frac{\partial\psi_n}{\partial n} = 1,\ \psi_n(x) = \mathcal{O}\Big(\ln|x|\Big)$$

$$\alpha_n(t) \equiv \alpha_n = \int_{\partial O_n} u_n^0 \cdot \tau \, ds + \int_{\Omega_n} \omega_n^0 = \int_{\partial J} u_n^0 \cdot \tau \, ds - \int_{A_n} \omega_n^0 + \int_{\Omega_n} \omega_n^0$$

hence

$$\alpha_n \; \to \; \alpha \; := \; \int_J u^0 \cdot \tau \, ds + \int_{C_{ub}(J)} \omega^0.$$

Inégalité uniforme de Poincaré dans des domaines extérieurs

Lemme

Soit ρ un réel positif tel que $\mathcal{C} \subset B(0,\rho)$. Si Ω vérifie (H1')-(H2'), alors il existe $C_\rho > 0$ et N_ρ, dépendant seulement de ρ, tel que

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega_n\cap B(0,\rho))} \leq C_\rho \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_n\cap B(0,\rho))},\ \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega_n),\ \forall n\geq N_\rho.$$

Nous avons besoin de contrôler uniformément la taille du support de ω_n. Equation de transport : nous avons besoin de contrôler uniformément la vitesse loin du bord.

Plan de l'exposé

1. Solution forte dans un domaine régulier
2. Solution faible dans 2 domaines non réguliers
3. Existence de solution faible dans les domaines singuliers
   - Domaines bornés simplement connexes
   - Domaines bornés avec un nombre fini de trous
   - Domaines non bornés avec un trou
4. **Loi de Biot-Savart dans les domaines simplement connexes**
5. Unicité des solutions faibles dans quelques domaines singuliers
   - Propriétés de la solution
   - Méthode de Liapounov
   - Preuve de l'unicité

Loi de Biot-Savart

Pour $\omega_n(t,\cdot)$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ donnés, il existe un unique champ de vecteur u_n vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_n = 0 & \text{dans } \Omega_n \\ \operatorname{rot} u_n = \omega_n & \text{dans } \Omega_n \\ u_n \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_n \\ \oint_{\partial\Omega_n} u_n \cdot \mathbf{ds} = \gamma & \text{pour } t \in [0,\infty) \\ \lim_{|x|\to\infty} |u_n| = 0. \end{cases}$$

La loi de Biot-Savart est la loi donnant u_n en fonction de ω_n et γ.

Green functions

La fonction de Green vérifie :

$$\begin{cases} \Delta_y G_{\Omega_n}(x,y) = \delta(y-x) \text{ pour } x, y \in \Omega_n \\ G_{\Omega_n}(x,y) = 0 \text{ pour } y \in \partial\Omega_n \\ G_{\Omega_n}(x,y) = G_{\Omega_n}(y,x) \end{cases}$$

Nous introduisons

$$K_{\Omega_n}(x,y) := \nabla_x^\perp G_{\Omega_n}(x,y)$$

et

$$K_{\Omega_n}[f](x) := \int_{\Omega_n} K_{\Omega_n}(x,y) f(y)\, dy.$$

Dans $\mathbb{R}^2$

La fonction de Green est

$$G_{\mathbb{R}^2}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |x - y|.$$

La loi de Biot Savart dans le plan entier est

$$u_n = K * \omega_n,$$

avec

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}.$$

Dans D^c

La fonction de Green est

$$G_{D^c}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x-y|}{|x-y^*||y|}.$$

Le champ de vecteur harmonique

$$H_{D^c}(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \ln|x| = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$$

est l'unique champ de vecteur vérifiant

$$\begin{cases} \mathrm{div}\, H_{D^c} = 0 & \text{dans } D^c \\ \mathrm{rot}\, H_{D^c} = 0 & \text{dans } D^c \\ H_{D^c} \cdot n = 0 & \text{sur } \partial D \\ H_{D^c} = \mathcal{O}(1/|x|) \text{ quand } |x| \to \infty & \\ \displaystyle\int_{\partial D} H_{D^c} \cdot \mathbf{ds} = 1. & \end{cases}$$

Dans D^c

La loi de Biot-Savart à l'extérieur de la boule unité est

$$u_n = u_n(t,x) = K_{D^c}[\omega_n(t,\cdot)](x) + \alpha H_{D^c}(x),$$

avec

$$K_D(x,y) = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} - \frac{(x-y^*)^\perp}{|x-y^*|^2}\Big).$$

et $\alpha(t) = \gamma + \int_{D^c} \omega_n(t,x)\,dx$.

Dans Ω_n

La fonction de Green est

$$G_n(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_n(y)|}{|\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_n(y)^*||\mathcal{T}_n(y)|}.$$

Le champ de vecteur harmonique est

$$H_n(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \ln |\mathcal{T}_n(x)| = \frac{1}{2\pi} D\mathcal{T}_n^t(x) \frac{\mathcal{T}_n(x)^\perp}{|\mathcal{T}_n(x)|^2}.$$

La loi de Biot-Savart dans un domaine extérieur est

$$u_n = u_n(t,x) = K_n[\omega_n(t,\cdot)](x) + \alpha H_n(x),$$

avec

$$K_n(x,y) = \frac{1}{2\pi} D\mathcal{T}_n^t(x) \Big(\frac{(\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_n(y))^\perp}{|\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_n(y)|^2} - \frac{(\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_n(y)^*)^\perp}{|\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_n(y)^*|^2} \Big).$$

et $\alpha(t) = \gamma + \int_{\Omega_n} \omega_n(t,x)\, dx$.

Convergence des noyaux et théorème de Caratheodory (1912)

Soit $\mathcal{T}_n$ l'unique biholomorphisme tel que

$$\mathcal{T}_n : {O_n}^c \mapsto D^c, \quad \text{avec } \mathcal{T}_n(\infty) = \infty, \quad \mathcal{T}_n'(\infty) > 0.$$

Proposition

Soit Π la composante connexe non borné de Ω. Il existe un unique biholomorphisme $\mathcal{T}$ de Π vers D^c, satisfaisant $\mathcal{T}(\infty) = \infty$, $\mathcal{T}'(\infty) > 0$. De plus, nous avons les propriétés de convergence suivantes :

i) *$\mathcal{T}_n^{-1}$ converge localement uniformément vers $\mathcal{T}^{-1}$ dans D^c.*

ii) *$\mathcal{T}_n$ (resp. $\mathcal{T}_n'$) converge localement uniformément vers $\mathcal{T}$ (resp. vers $\mathcal{T}'$) dans Π.*

iii) *$|\mathcal{T}_n|$ converge localement uniformément vers 1 dans $\Omega \setminus \Pi$.*

Lemme

Soit R_0 assez grand pour que $\Pi^c \cup \text{supp } \omega_n^0 \subset B(0, R_0)$. Alors, il existe $C_0 = C(\|\omega^0\|_{L^1}, \|\omega^0\|_{L^\infty}, R_0)$ tel que

$$\Big\| u_n(t,x) \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times B(0,R_0)^c)} \leq C_0, \ \forall n.$$

Comme ω_n est transporté par u_n, nous pouvons conclure que

$$\text{supp } \omega_n(t,\cdot) \subset B(0, R_0 + C_0 t), \ \forall t, \ \forall n.$$

Estimation d'énergie :
$\|\nabla\psi_n^0(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_n)} \leq \|\omega_n(t,\cdot)\|_{L^2}\|\psi_n^0(t,\cdot)\|_{L^2(\text{supp } \omega_n)}$.
Inégalité de Poincaré sur $B(0, R_0 + C_0 T)$:
$\|\nabla\psi_n^0(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_n)} \leq C$.
Inégalité de Poincaré sur K : $\|\psi_n^0(t,\cdot)\|_{H_0^1(\Omega_n \cap K)} \leq C, \ \forall t \in [0,T]$.
Estimation de la vitesse : $\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega_n \cap K)} \leq C$.
$\Longrightarrow$ compacité forte de u_n vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$.

Théorème d'existence dans un domaine extérieur

Théorème (Gérard Varet - C.L.)

Soit $p > 2$ et u_0 une donnée initiale telle que

$$u^0 \in L^2_{\text{loc}}(\Omega),\ \mathrm{rot}\, u^0 \in L^p_c(\overline{\Omega}),\ \mathrm{div}\, u^0 = 0,\ u^0 \cdot n_{|\partial\Omega} = 0,\ \lim_{|x|\to\infty} u^0(x) = 0,$$

alors il existe une solution faible global aux équations d'Euler dans Ω telle que

$$u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega})) \quad \text{et } \mathrm{rot}\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^p(\Omega)).$$

Résumé : nous avons considéré u_n une solution forte aux équations d'Euler $\Omega_n := \widetilde{\Omega}_n \setminus \overline{\mathcal{O}^i_n}$, et nous avons obtenu la compacité grâce à la γ- convergence et la convergence des noyaux.

Plan de l'exposé

La preuve de Yudovich

Dans les domaines réguliers, avec $\omega^0 \in L^1 \cap L^\infty$. Soient u_1 et u_2 deux solutions. Alors $\tilde{u} := u_1 - u_2$ vérifie

$$\partial_t \tilde{u} + u_1 \cdot \nabla \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla u_2 = -\nabla \tilde{p}.$$

$\cdot \tilde{u}$ et $\int_\Omega$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_{L^2}^2 \leq \int |\tilde{u}||\nabla u_2||\tilde{u}|.$$

Inégalité de Calderón-Zygmund :

$$\|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega)} \leq Cp\|\omega_2\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall p \in [2, \infty).$$

Alors, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}\|_{L^2}^2 \leq Cp\|\tilde{u}\|_{L^2}^{2-\frac{2}{p}}$ et nous avons par un argument de type Gronwall

$$\|\tilde{u}(T, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq (2CT)^p, \ \forall T, p > 2.$$

Nous choisissons $T < 1/(2C)$, et $p \to \infty \implies$ unicité sur $[0, \frac{1}{2C})$ + itération.

Plan de l'exposé

Soit Ω un domaine borné simplement connexe tel que le bord a un nombre fini de coins (d'angle α_i en z_i).

Soit u une solution faible aux équations d'Euler telle que $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ et $\mathrm{rot}\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^\infty)$.

Loi de Biot-Savart :

$$u(t,x) = \frac{D\mathcal{T}^t(x)}{2\pi} \int_\Omega \Big(\frac{(\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y))^\perp}{|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)|^2} - \frac{(\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)^*)^\perp}{|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)^*|^2} \Big) \omega(t,y)\, dy.$$

Estimations elliptiques près d'un coin

Théorème (Grisvard, Kozlov-Mazya-Rossmann)

Le biholomorphisme $\mathcal{T}$ satisfait

- $\mathcal{T}^{-1}$ et $\mathcal{T}$ s'étend continûment jusqu'au bord ;
- $D\mathcal{T}^{-1}$ s'étend continûment jusqu'au bord, excepté aux points $\mathcal{T}(z_i)$ dont $\alpha_i < \pi$ où $D\mathcal{T}^{-1} \approx \dfrac{1}{|y - \mathcal{T}(z_i)|^{1-\frac{\alpha_i}{\pi}}}$;
- $D\mathcal{T}$ s'étend continûment jusqu'au bord, excepté aux points z_i dont $\alpha_i > \pi$ où $D\mathcal{T} \approx \dfrac{1}{|x - z_i|^{1-\frac{\pi}{\alpha_i}}}$;
- $D^2\mathcal{T}$ appartient à $L^p_{\text{loc}}(\overline{\Omega})$ pour tout $p < 4/3$.

Si $\alpha_i > \pi/2$, $\forall i$, alors $u \approx 1/|x - z_i|^{1-\frac{\pi}{\alpha_i}}$.

Proposition

La paire d'extension vérifie au sens des distributions

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\omega} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{\omega} = 0, & \textit{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \textit{ et } \operatorname{rot} \bar{u} = \bar{\omega} + g_{\bar{\omega}}(s)\delta_{\partial\Omega}, & \textit{dans } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ \bar{\omega}(x, 0) = \bar{\omega}_0(x), & \textit{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

où $\delta_{\partial\Omega}$ est la masse de Dirac le long de la courbe et $g_{\bar{\omega}}$ est :

$$g_{\bar{\omega}}(x) = -u \cdot \hat{\tau} = -\Big[\lim_{\rho \to 0^+} K_\Omega[\bar{\omega}](x - \rho\hat{n})\Big] \cdot \hat{\tau}$$

De plus, grâce aux estimations elliptiques, nous savons que

$$\bar{u} \in L^\infty_{\rm loc}\left(\mathbb{R}^+, W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)\right) \cap L^\infty_{\rm loc}\left(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^2) + L^\infty(\mathbb{R}^2)\right).$$

$\Longrightarrow \bar{\omega}$ est une solution renormalisée au sens de DiPerna-Lions.

Alors, $\|\omega(t,\cdot)\|_{L^p} = \|\omega^0\|_{L^p}$, $\forall t \geq 0$, $\forall p \in [1, \infty]$.

Plan de l'exposé

1. Solution forte dans un domaine régulier
2. Solution faible dans 2 domaines non réguliers
3. Existence de solution faible dans les domaines singuliers
   - Domaines bornés simplement connexes
   - Domaines bornés avec un nombre fini de trous
   - Domaines non bornés avec un trou
4. Loi de Biot-Savart dans les domaines simplement connexes
5. **Unicité des solutions faibles dans quelques domaines singuliers**
   - Propriétés de la solution
   - Méthode de Liapounov
   - Preuve de l'unicité

Les trajectoires

Quand la vitesse u est régulière, elle engendre un flot $\phi_x(t)$ définit par

$$\frac{d}{dt}\phi_x(t) = u\big(t, \phi_x(t)\big), \quad \phi_x(0) = x,$$

et nous avons $\frac{d}{dt}\omega\big(t, \phi_x(t)\big) \equiv 0$.
Nous introduisons

$$L_1(t,x) := \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \ln\Big(\frac{|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)|}{|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)^*||\mathcal{T}(y)|}\Big)\omega(t,y)\,dy$$

et

$$L(t) := -\ln|L_1(t, \phi(t))|,$$

qui tend vers l'infini si $\phi(t)$ va vers le bord.

Explosion près du bord

Lemme

Il existe $C_1 = C_1(\omega_0)$ tel que

$$|L_1(t,x)| \leq C_1 ||\mathcal{T}(x)| - 1|^{1/2},\ \forall x,\ \forall t.$$

Lemme

Si ω_0 est négative, alors il existe $C_2 = C_2(\omega_0)$ tel que

$$L_1(t,x) \geq C_2 ||\mathcal{T}(x)| - 1|,\ \forall x,\ \forall t.$$

Supposons que $L(0) < \infty$. Nous dérivons L :

$$L'(t) = -\Big(\partial_t L_1(t,\phi(t)) + \phi'(t)\cdot\nabla L_1(t,\phi(t))\Big)/L_1(t,\phi(t)).$$

Tout d'abord, nous remarquons que $u(t,x)\cdot\nabla L_1(t,x) \equiv 0$.
Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\partial_t L_1(t,x) =& \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \ln\Big(\frac{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)|}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*||\mathcal{T}(y)|}\Big)\partial_t\omega(y)\,dy\\
=& -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \ln\Big(\frac{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)|}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*||\mathcal{T}(y)|}\Big)\mathrm{div}\,(u(y)\omega(y))\,dy\\
=& \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \nabla_y\Big[\ln\Big(\frac{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)|}{|\mathcal{T}(x)-\mathcal{T}(y)^*||\mathcal{T}(y)|}\Big)\Big]\cdot u(y)\omega(y)\,dy\\
=& \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \Big[\Big(\frac{\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)}{|\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)|^2} - \frac{\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)^*}{|\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)^*|^2}\Big)\\
& \qquad D\mathcal{T}(y)\frac{1}{2\pi}D\mathcal{T}^T(y)R[\omega](y)\Big]\omega(y)\,dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_\Omega \Big[\Big(\frac{\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)}{|\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)|^2} - \frac{\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)^*}{|\mathcal{T}(y)-\mathcal{T}(x)^*|^2}\Big)R[\omega](y)\Big]|\det(D\mathcal{T})(y$$

Lemme

Il existe C_3 tel que

$$|\partial_t L_1(t,x)| \leq C_3 ||\mathcal{T}(x)| - 1| \Big(1 + \Big|\ln ||\mathcal{T}(x)| - 1|\Big|\Big), \ \forall x, \ \forall t.$$

Nous avons donc

$$L'(t) = \frac{\partial_t L_1}{L_1} \leq \ln L_1 = L(t)$$

d'où L reste bornée.

Proposition

Soit ω_0 a support compact dans Ω. Si ω_0 est positif alors, pour tout $\mathbf{T}^* > 0$, il existe a voisinage $U_{\mathbf{T}^*}$ de $\partial\Omega$ tel que

$$\omega(t) \equiv 0 \qquad dans \quad U_{\mathbf{T}^*}, \qquad \forall t \in [0, \mathbf{T}^*].$$

Plan de l'exposé

Soit $v_i := K_{\mathbb{R}^2}[\omega_i]$ et $w_i := u_i - v_i$. Nous notons par tilde la différence, et nous avons

$$\partial_t \tilde{v} + \tilde{v} \cdot \nabla v_1 + v_2 \cdot \nabla \tilde{v} + \operatorname{div}\left(\tilde{v} \otimes w_1 + v_2 \otimes \tilde{w} + w_1 \otimes \tilde{v} + \tilde{w} \otimes v_2\right)$$
$$- \left(v_1(s)^{\perp} \tilde{g}_{\tilde{v},0}(s) - \tilde{v}(s)^{\perp} \tilde{g}_{v_2,\gamma_0}(\right.$$

$\cdot \tilde{v}$ et on intègre. Nous avons quelques termes du genre $\int_{\mathbb{R}^2} |w_1||\tilde{v}||\nabla \tilde{v}|$, avec w_1 explosant près des coins. Loin du bord, nous suivons ce qu'a fait Yudovich, et près du bord nous calculons

$$\int_U |w_1||\tilde{v}||\nabla \tilde{v}| \leq \|w_1\|_{L^1(U)} \|\tilde{v}\|_{L^\infty(U)} \|\nabla \tilde{v}\|_{L^\infty(U)} \leq C \|\tilde{v}\|^2_{L^2(U)}$$

$\Longrightarrow$ unicité par Gronwall.

Théorème (C.L.)

Soit Ω est un ouvert borné simplement connexe, tel que $\partial\Omega$ a un nombre fini de coins avec des angles supérieur à $\pi/2$ et soit u_0 vérifiant (CC). Si $\mathrm{rot}\, u_0 \in L^\infty_c(\Omega)$ est positif (resp. négatif), alors **il existe une unique solution faible globale** sur les équations d'Euler sur Ω vérifiant

$$u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)), \ \mathrm{rot}\, u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^\infty(\Omega)).$$

Théorème (C.L.)

Soit Ω est un ouvert borné simplement connexe, tel que $\partial\Omega$ a un nombre fini de coins avec des angles supérieur à $\pi/2$ et soit u_0 vérifiant (CC). Si $\operatorname{rot} u_0 \in L^\infty_c(\Omega)$ est positif (resp. négatif), alors **il existe une unique solution faible globale** sur les équations d'Euler sur Ω vérifiant

$$u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\text{loc}}(\Omega)),\ \operatorname{rot} u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^\infty(\Omega)).$$

Dans les domaines extérieurs, il faut considérer la circulation, les champs de vecteurs harmoniques, contrôler la taille du support de la vorticité...

Théorème (C.L.)

Soit Ω est un ouvert borné simplement connexe, tel que $\partial\Omega$ a un nombre fini de coins avec des angles supérieur à $\pi/2$ et soit u_0 vérifiant (CC). Si $\operatorname{rot} u_0 \in L^\infty_c(\Omega)$ est positif (resp. négatif), alors **il existe une unique solution faible globale** sur les équations d'Euler sur Ω vérifiant

$$u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2_{\text{loc}}(\Omega)),\ \operatorname{rot} u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1 \cap L^\infty(\Omega)).$$

Théorème (C.L.)

Soit $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est un compact simplement connexe, tel que $\partial\Omega$ a un nombre fini de coins avec des angles supérieur à $\pi/2$. Soit u_0 vérifiant (CC). Si $\operatorname{rot} u_0 \in L^\infty_c(\Omega)$ est positif et $\gamma_0 \leq -\int \operatorname{rot} u_0$(resp. $\operatorname{rot} u_0$ négatif et $\gamma_0 \geq -\int \operatorname{rot} u_0$), alors **il existe une unique solution faible globale** aux équations d'Euler dans Ω, vérifiant