

# Stabilité des schémas numériques pour les problèmes aux limites hyperboliques

Jean-François Coulombel

CNRS, Université Lille 1  
Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)  
Equipe projet SIMPAF - INRIA Lille Nord Europe

Groupe de Travail Paris 6, 8 février 2010

# Plan

- 1 Problèmes aux limites continus : rappels
- 2 Problèmes aux limites discrets
  - Le schéma numérique
  - Analyse par modes normaux
  - Le résultat de stabilité
  - Exemples

# Les équations

On considère le **problème aux limites** :

$$\begin{cases} Lu := \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u = f, & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}_+^d, \\ Bu = g, & \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R}^{d-1}, \\ u_{t=0} = u_0, & \text{sur } \mathbb{R}_+^d. \end{cases}$$

Domaine spatial :  $\mathbb{R}_+^d = \{x_d > 0\}$ .

Système **linéaire** à **coefficients constants**.

## Problème général

Etant donné l'opérateur  $L$ , trouver (caractériser) les conditions au bord  $B$  qui conduisent à un problème fortement **bien-posé** : la solution et sa trace sont estimées dans **le même espace** que les données.

# Points-clés

Pour montrer qu'un problème aux limites est bien-posé, il faut :

- 1 Une hypothèse de **stabilité** pour le problème de Cauchy :  
l'**hyperbolicité**.
- 2 Une hypothèse supplémentaire de **structure** sur le **symbole** associé  
au problème de Cauchy.
- 3 Une **compatibilité** entre les conditions au bord et le système  
hyperbolique : **Condition de Kreiss-Lopatinskii Uniforme**.

# Les hypothèses

## Hypothèse d'hyperbolicité (stabilité)

Les matrices  $A(\xi) = \sum_j \xi_j A_j$  sont **diagonalisables** à **valeurs propres réelles** avec des matrices de passage uniformément bornées lorsque  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ .

## Hypothèse de bord non-caractéristique

La matrice  $A_d$  est inversible.

Le rang  $p$  de  $B$  est égal au nombre de valeurs propres positives de  $A_d$  (**caractéristiques rentrantes**). On choisit  $B$  de rang maximal.

# Les hypothèses

## Hypothèse d'opérateur hyperbolique "géométriquement régulier"

Au voisinage de tout  $\underline{\xi} \in \mathbb{S}^{d-1}$ , il existe une détermination **analytique** des valeurs propres **et** des vecteurs propres de  $A(\underline{\xi})$ .

Cette hypothèse recouvre le cas des systèmes **strictement hyperboliques** (Kreiss, Sakamoto 1970) et le cas des systèmes **hyperboliques à multiplicité constante** (Métivier 2000).  
Cadre introduit par Métivier et Zumbrun 2005.

# L'analyse par modes normaux

On raisonne sur le problème aux limites global en temps.  
 Analyse par **transformée de Fourier-Laplace** :

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{v}}{dx_d} = \mathcal{A}(\zeta) \widehat{v} + F, & x_d > 0, \\ B \widehat{v} = G, & x_d = 0. \end{cases}$$

$\tau - i\gamma$  : fréquence temporelle ;  $\eta$  : fréquences tangentielles.  
 $\zeta = (\tau - i\gamma, \eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{d-1}$ .

$$\mathcal{A}(\zeta) = -i A_d^{-1} \left( (\tau - i\gamma) I + \sum_{j=1}^{d-1} \eta_j A_j \right).$$

# Le sous-espace stable

## Lemme (Hersh 1963)

Si  $\gamma > 0$ , la matrice  $\mathcal{A}(\zeta)$  n'a pas de valeur propre imaginaire pure. Son **sous-espace stable**  $E^-(\zeta)$  est de dimension constante égale à  $p$ , et dépend analytiquement de  $\zeta$ .

## Théorème (Métivier, Zumbrun 2005)

Le sous-espace stable  $E^-$  se **prolonge continûment** en tout point  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ . On obtient un fibré continu au dessus de  $\{\operatorname{Im} z \leq 0\} \times \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$ .

Ces résultats sont indépendants des conditions aux limites.



# Condition de Lopatinskii uniforme

## Condition de Lopatinskii Uniforme (Kreiss, Sakamoto 1970)

Pour tout  $\zeta = (\tau - i\gamma, \eta) \neq 0$  avec  $\gamma \geq 0$ , on a  $E^-(\zeta) \cap \text{Ker } B = \{0\}$ .

C'est une condition **nécessaire** pour avoir un problème bien-posé **sans perte de régularité**.

En fait, c'est également une condition **suffisante**...

# Estimation d'énergie

## Théorème (estimation a priori)

Si la CLU est satisfaite, alors pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière, on a l'**estimation a priori** suivante :

$$\gamma \|u\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^{1+d}_+)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma} \|Lu\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^{1+d}_+)}^2 + \|Bu|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)}^2,$$

pour tout  $\gamma \geq 1$ .

# Estimation d'énergie

## Théorème (estimation a priori)

Si la CLU est satisfaite, alors pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière, on a l'**estimation a priori** suivante :

$$\gamma \|u\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}_+^{1+d})}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)}^2 \lesssim \frac{1}{\gamma} \|Lu\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}_+^{1+d})}^2 + \|B u|_{x_d=0}\|_{L^2_\gamma(\mathbb{R}^d)}^2,$$

pour tout  $\gamma \geq 1$ .

## Remarques

- L'estimation a priori permet de **résoudre** le problème pour des termes source  $f, g$  arbitraires dans  $L^2$  et une donnée initiale  $u_0$  **nulle**.
- Si le système est **symétrisable** ou **strictement hyperbolique**, on peut étendre à des données initiales **non-nulles** dans  $L^2$  (Rauch 1972).

# Résumé

Sous les hypothèses d'hyperbolicité et de régularité géométrique, on a **caractérisé** les problèmes bien-posés par la vérification d'une condition algébrique.

Pour définir cette condition algébrique, il faut tout d'abord montrer que l'on peut étendre par continuité un certain fibré vectoriel. **Cela n'a rien d'automatique!** (cf. la MHD, Métivier, Zumbrun 2005).

# Le cas unidimensionnel

L'opérateur hyperbolique s'écrit  $L = \partial_t + A \partial_x$ . Son symbole est géométriquement régulier !

Si  $d = 1$ , la CLU se réduit à  $E^+(A) \cap \text{Ker } B = \{0\}$ .

Les conditions au bord doivent fournir les traces des **caractéristiques entrantes** en fonction des traces des **caractéristiques sortantes**.  
Diagonaliser  $A$  puis intégrer le long des caractéristiques. Les estimations d'énergie deviennent triviales !

## Le cas unidimensionnel

L'opérateur hyperbolique s'écrit  $L = \partial_t + A \partial_x$ . Son symbole est géométriquement régulier !

Si  $d = 1$ , la CLU se réduit à  $E^+(A) \cap \text{Ker } B = \{0\}$ .

Les conditions au bord doivent fournir les traces des **caractéristiques entrantes** en fonction des traces des **caractéristiques sortantes**.  
Diagonaliser  $A$  puis intégrer le long des caractéristiques. Les estimations d'énergie deviennent triviales !

Cette méthode ne s'étend pas au cas  $d \geq 2$  car les  $A_j$  ne commutent pas deux-à-deux (en général)  $\Rightarrow$  plus d'intégration sur les caractéristiques.

# Plan

## 1 Problèmes aux limites continus : rappels

## 2 Problèmes aux limites discrets

- Le schéma numérique
- Analyse par modes normaux
- Le résultat de stabilité
- Exemples

# La discrétisation

On se place dans le cas **unidimensionnel**, et on considère des données initiales **nulles**.

$\Delta t, \Delta x$  : pas de temps et d'espace. Le rapport  $\lambda = \Delta t / \Delta x$  est maintenu **fixe**.



# La discrétisation

On se place dans le cas **unidimensionnel**, et on considère des données initiales **nulles**.

$\Delta t, \Delta x$  : pas de temps et d'espace. Le rapport  $\lambda = \Delta t / \Delta x$  est maintenu **fixe**.

On note  $U_j^n$  l'**approximation** supposée de  $u$  sur la cellule  $[n \Delta t, (n + 1) \Delta t[ \times [j \Delta x, (j + 1) \Delta x[$ , avec :

$$n \in \mathbb{N}, \quad j \in 1 - r + \mathbb{N}.$$

Pour  $1 - r \leq j \leq 0$ , les  $U_j^n$  approchent la **trace**  $u(n \Delta t, 0)$ .

# Le schéma numérique

Le schéma (ici à un pas) s'écrit :

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = Q U_j^n + \Delta t f_j^n, & j \geq 1, \\ U_j^{n+1} = B_j U_1^{n+1} + g_j^n, & j = -r + 1, \dots, 0, \\ U_j^0 = 0, & j \geq -r + 1, \end{cases}$$

avec des opérateurs  $Q$  et  $B_j$  donnés par :

$$Q := \sum_{\ell=-r}^p A_\ell T^\ell, \quad B_j := \sum_{\ell=0}^q B_{\ell,j} T^\ell, \quad T U_j = U_{j+1}.$$

# Définition de la stabilité forte

## Définition (stabilité forte, Gustafsson, Kreiss, Sundström 1972)

Le schéma est dit **fortement stable** s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\gamma > 0$  et pour tout  $\Delta t \in ]0, 1]$ , on a :

$$\frac{\gamma}{\gamma \Delta t + 1} \sum_{n \geq 0} \sum_{j \geq -r+1} \Delta t \Delta x e^{-2\gamma n \Delta t} |U_j^n|^2 + \sum_{n \geq 0} \sum_{j=-r+1}^0 \Delta t e^{-2\gamma n \Delta t} |U_j^n|^2 \leq C \left( \frac{\gamma \Delta t + 1}{\gamma} \|f\|_{L^2_\gamma}^2 + \|g\|_{L^2_\gamma}^2 \right).$$

On voudrait **caractériser** les schémas fortement stables.

# Plan

- 1 Problèmes aux limites continus : rappels
- 2 Problèmes aux limites discrets
  - Le schéma numérique
  - **Analyse par modes normaux**
  - Le résultat de stabilité
  - Exemples

# Equation résolvente

On obtient l'équation résolvente après une **transformée de Laplace** en temps :

$$\begin{cases} (I - z^{-1} Q) w_j = F_j, & j \geq 1, \\ w_j - B_j w_1 = g_j, & j = -r + 1, \dots, 0, \end{cases}$$

où  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| > 1$ .

**Relation de récurrence** d'ordre  $p + r$  sur la suite  $(w_j) \in \ell^2$ , avec une condition sur les premiers termes.

# Caractérisation de la stabilité forte

## Proposition (GKS)

Le schéma est fortement stable **si et seulement si** l'équation résolvente admet une unique solution dans  $\ell^2$  pour tout  $|z| > 1$  et si de plus cette solution vérifie :

$$\frac{|z| - 1}{|z|} \sum_{j \geq -r+1} |w_j|^2 + \sum_{j=-r+1}^0 |w_j|^2 \lesssim \frac{|z|}{|z| - 1} \sum_{j \geq 1} |F_j|^2 + \sum_{j=-r+1}^0 |g_j|^2.$$

# Stratégie pour montrer la stabilité forte

- 1 Réécrire l'équation résolvente comme une **équation d'évolution** dans la "variable normale".
- 2 Construire des **symétriseurs** pour montrer une **estimation a priori** de  $w$ .
- 3 Montrer qu'on peut effectivement résoudre l'équation résolvente ("injectif  $\Rightarrow$  bijectif").

# Plan

## 1 Problèmes aux limites continus : rappels

## 2 Problèmes aux limites discrets

- Le schéma numérique
- Analyse par modes normaux
- **Le résultat de stabilité**
- Exemples



## Equation résolvente (suite)

On écrit l'équation résolvente sous la forme **équivalente** :

$$\begin{cases} W_{j+1} = \mathbb{M}(z) W_j + \tilde{F}_j, & j \geq 1, \\ B(z) W_1 = g, \end{cases}$$

où  $\mathbb{M}$  et  $B$  sont **holomorphes** sur un voisinage de  $\{|z| \geq 1\}$ .

“Equation d'évolution dans la variable normale.”

# Le sous-espace stable

Hypothèse (stabilité  $\ell^2$  pour le problème de Cauchy discret)

La matrice :

$$\widehat{Q}(\kappa) := \sum_{\ell=-r}^p \kappa^\ell A_\ell,$$

est de **puissances uniformément bornées** pour  $\kappa = e^{i\xi} \in \mathbb{S}^1$ .

# Le sous-espace stable

Hypothèse (stabilité  $\ell^2$  pour le problème de Cauchy discret)

La matrice :

$$\widehat{Q}(\kappa) := \sum_{\ell=-r}^p \kappa^\ell A_\ell,$$

est de **puissances uniformément bornées** pour  $\kappa = e^{i\xi} \in \mathbb{S}^1$ .

Proposition (Kreiss 1968)

Pour  $|z| > 1$ ,  $\mathbb{M}(z)$  n'a pas de valeur propre sur  $\mathbb{S}^1$ . Son sous-espace propre associé aux valeurs propres de module  $< 1$  est noté  $E^s(z)$ ; il dépend holomorphiquement de  $z$  et a pour dimension  $Nr$ .

# Hypothèse de structure

## Hypothèse (régularité géométrique des éléments propres)

Si  $\underline{\kappa} \in \mathbb{S}^1$  et  $\underline{z} \in \mathbb{S}^1$  est une valeur propre de  $\widehat{Q}(\underline{\kappa})$ , alors il existe une détermination **holomorphe** des valeurs propres (proches de  $\underline{z}$ ) et des vecteurs propres au voisinage de  $\underline{\kappa}$  :

$$\det(zI + \widehat{Q}(\underline{\kappa})) = \vartheta(\underline{\kappa}, z) \prod_{j=1}^{\alpha} (z + \lambda_j(\underline{\kappa})),$$

$$\widehat{Q}(\underline{\kappa}) E_j(\underline{\kappa}) = \lambda_j(\underline{\kappa}) E_j(\underline{\kappa}).$$

# Résultat de stabilité

## Théorème (C. 2009)

Le sous-espace stable  $E^s$  se **prolonge continûment** en tout point  $z \in \mathbb{S}^1$ .  
On obtient un fibré continu au dessus de  $\{|z| \geq 1\}$ .

Ce résultat est indépendant des conditions aux limites imposées.

# Résultat de stabilité

## Théorème (C. 2009)

Le sous-espace stable  $E^s$  se **prolonge continûment** en tout point  $z \in \mathbb{S}^1$ .  
On obtient un fibré continu au dessus de  $\{|z| \geq 1\}$ .

Ce résultat est indépendant des conditions aux limites imposées.

## Théorème (C. 2009)

Sous l'hypothèse de régularité géométrique, la stabilité forte est **équivalente** à la condition de Lopatinskii uniforme :

$$\forall |z| \geq 1, \quad E^s(z) \cap \text{Ker } B(z) = \{0\}.$$

# Schéma de preuve

On veut construire un **symétriseur**  $S(z)$  pour l'équation résolvente :

- $S(z)$  est hermitienne,
- $M(z)^* S(z) M(z) - S(z) \geq c (|z| - 1)/|z| I$ ,
- $W^* S(z) W \geq c |W|^2 - C |B(z) W|^2$ .

# Schéma de preuve

On veut construire un **symétriseur**  $S(z)$  pour l'équation résolvente :

- $S(z)$  est hermitienne,
- $\mathbb{M}(z)^* S(z) \mathbb{M}(z) - S(z) \geq c (|z| - 1)/|z| I$ ,
- $W^* S(z) W \geq c |W|^2 - C |B(z) W|^2$ .

Principe (Kreiss) : réduire  $\mathbb{M}$  sous forme diagonale par blocs pour **découpler** le sous-espace stable et le sous-espace instable. On construit séparément les symétriseurs pour chacun des blocs.



# Schéma de preuve

On veut construire un **symétriseur**  $S(z)$  pour l'équation résolvente :

- $S(z)$  est hermitienne,
- $\mathbb{M}(z)^* S(z) \mathbb{M}(z) - S(z) \geq c (|z| - 1)/|z| I$ ,
- $W^* S(z) W \geq c |W|^2 - C |B(z) W|^2$ .

Principe (Kreiss) : réduire  $\mathbb{M}$  sous forme diagonale par blocs pour **découpler** le sous-espace stable et le sous-espace instable. On construit séparément les symétriseurs pour chacun des blocs.

Selon le comportement des valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\hat{Q}$ , les blocs ont différentes propriétés (taille, signe des coefficients etc.).

## Schéma de preuve (suite)

### Remarque (coeur de la preuve)

Pour le problème continu, le spectre de  $A(\xi)$  appartient à une **droite** !

Dans le cas discret, le spectre de  $\widehat{Q}(e^{i\xi})$  appartient à un **disque**. On a moins d'informations car le schéma peut avoir un comportement hyperbolique, parabolique, dispersif... On doit construire de **nouveaux** symétriseurs.

## Schéma de preuve (fin)

Pour résoudre l'équation résolvante, on peut utiliser le résultat :

### Lemme

Soit  $E$  un espace de Banach,  $\mathcal{T}$  un ensemble **connexe**, et  $L : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{L}(E)$  une application **continue**. Supposons :

- il existe  $C_0 > 0$  telle que pour  $t \in \mathcal{T}$  et  $x \in E$ ,  $|x|_E \leq C_0 |L(t)x|_E$ ,
- il existe  $t_0 \in \mathcal{T}$  tel que  $L(t_0)$  soit un isomorphisme.

Alors  $L(t)$  est un isomorphisme pour tout  $t \in \mathcal{T}$ .

## Schéma de preuve (fin)

Pour résoudre l'équation résolvente, on peut utiliser le résultat :

### Lemme

Soit  $E$  un espace de Banach,  $\mathcal{T}$  un ensemble **connexe**, et  $L : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{L}(E)$  une application **continue**. Supposons :

- il existe  $C_0 > 0$  telle que pour  $t \in \mathcal{T}$  et  $x \in E$ ,  $|x|_E \leq C_0 |L(t)x|_E$ ,
- il existe  $t_0 \in \mathcal{T}$  tel que  $L(t_0)$  soit un isomorphisme.

Alors  $L(t)$  est un isomorphisme pour tout  $t \in \mathcal{T}$ .

On combine alors **l'estimation a priori** et l'inversibilité de l'équation résolvente pour  $|z|$  grand (point fixe de Banach).

De l'avantage de l'analyse numérique sur l'analyse des edp...

# Plan

## 1 Problèmes aux limites continus : rappels

## 2 Problèmes aux limites discrets

- Le schéma numérique
- Analyse par modes normaux
- Le résultat de stabilité
- Exemples

# Schémas de Runge-Kutta

On considère l'opérateur de transport  $\partial_t + a \partial_x$ .

On se donne une discrétisation de  $\partial_x$  :

$$D U_j := \frac{2}{3} (U_{j+1} - U_{j-1}) - \frac{1}{12} (U_{j+2} - U_{j-2}),$$

et on pose (**Runge-Kutta** d'ordre 4) :

$$U_j^{n+1} = \sum_{\ell=0}^4 \frac{(-\lambda a D)^\ell}{\ell!} U_j^n. \quad (\text{Ici } p = r = 8.)$$

# Schémas de Runge-Kutta

On considère l'opérateur de transport  $\partial_t + a \partial_x$ .

On se donne une discrétisation de  $\partial_x$  :

$$D U_j := \frac{2}{3} (U_{j+1} - U_{j-1}) - \frac{1}{12} (U_{j+2} - U_{j-2}),$$

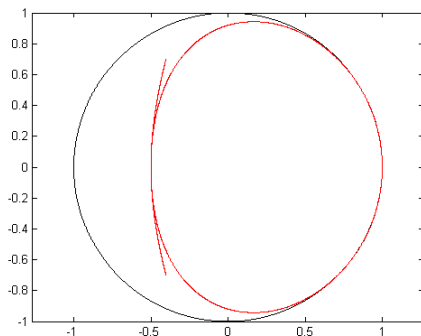
et on pose (**Runge-Kutta** d'ordre 4) :

$$U_j^{n+1} = \sum_{\ell=0}^4 \frac{(-\lambda a D)^\ell}{\ell!} U_j^n. \quad (\text{Ici } p = r = 8.)$$

**Stabilité et régularité géométrique** :  $\left| \sum_{\ell=0}^4 \frac{(-\lambda a \widehat{D}(e^{i\xi}))^\ell}{\ell!} \right| \leq 1.$

# Points de tangence réguliers

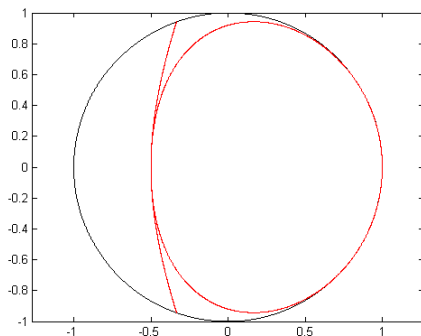
La courbe paramétrée pour  $\lambda$  "petit" :





# Points de contact singuliers d'ordre pair

La courbe paramétrée pour  $\lambda$  maximal :



# Un point de contact singulier d'ordre 3

Valeurs propres pour un schéma à deux pas de temps :

